

Onderzoek CTE 2022

Alternatieve correctievoorschriften vwo wiskunde B



Arnhem, Stichting Cito
2023

Irene van Stiphout en Ruud Stolwijk

Inhoud

Inleiding en achtergrond	5
Methode	8
Resultaten	9
Conclusies en aanbevelingen	32
Literatuur	35
Bijlage A: Alternatief correctievoorschrift	36

Inleiding en achtergrond

Binnen het cluster exact staat afstemming van de correctievoorschriften van de examens van de exacte vakken sinds jaren op de agenda. In 2017 is eerder onderzoek uit 2012 weer opgepakt en is gekeken naar wat voor verschillen er zijn tussen de correctievoorschriften van de examens van de exacte vakken, in hoeverre die verschillen te verklaren zijn en in hoeverre te overbruggen (Van Stiphout, Stolwijk & Smeets, 2018). In 2018 zijn de ontwikkelingen per vak in kaart gebracht (Van Stiphout, Stolwijk, Smeets, Limburg & Galema, 2019) en in 2019 is onder meer onderzocht naar hoe binnen de exacte vakken wordt omgegaan met rekenen (Van Stiphout, Stolwijk, Limburg & Kruijver, 2020).

In het kader van verdere afstemming heeft wiskunde gekeken naar de aanpak die natuurkunde gebruikt in de correctievoorschriften van hun examens. Er zijn verschillende redenen om een andere aanpak te verkennen.

De belangrijkste reden is dat we met het correctievoorschrift nog meer recht willen doen aan de essentie van de wiskundige vaardigheid van leerlingen. Dat betekent dat we leerlingen willen belonen voor hun wiskundige, en niet alleen rekenkundige, vaardigheden. Hierbij verleggen we de nadruk van rekenkundige naar inzichtelijke aspecten.

Een andere reden om het correctievoorschrift te willen herzien is de behoefte om een nieuwe balans te vinden tussen duidelijkheid voor docenten en een gedetailleerd correctievoorschrift. Figuur 1 en figuur 2 laten de uitersten van dit spectrum zien. Figuur 1 toont een correctievoorschrift uit de jaren '80 waarin per onderdeel meerdere punten te verdelen zijn naar eigen inzichten van de docent. Figuur 2 toont een correctievoorschrift voor een opgave uit het examen vwo wiskunde B van 2021 waarbij zes verschillende strategieën zijn uitgeschreven voor één vraag. Deze voorbeelden laten zien dat een nieuwe balans hiertussen welkom is.

A 3.	voor a :	6 punten;	voor de uiterste waarde	4 punten;
	b :		voor het bereik	2 punten;
	voor b :	4 punten;		
	voor c :	5 punten;	voor de oplossing van $f(x) = 3$	3 punten.

Figuur 1: Minimaal correctievoorschrift van een examen uit de jaren '80.

P en P'	
14 maximumscore 6	
• De lijn door O en P heeft hellingshoek $(180-120)=60^\circ$	1
• De richtingscoëfficiënt van deze lijn is dus $\sqrt{3}$	1
• Voor de x-coördinaat van P geldt $\sqrt{3} \cdot x = 6\sqrt{3}$	1
• Een exacte berekening waaruit volgt $x=12$ ($x=0$ voldoet niet)	1
• Dus $P(12, 6\sqrt{12})$, dus $OP = \sqrt{12^2 + (6\sqrt{12})^2} = 24$	1
• Dus $x_p = -24$	1
of	
• $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix}$ en een richtingsvector van OP' is $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (of een andere vector van de vorm $\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ met $a < 0$)	1
• $\cos(120^\circ) = \frac{\begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right }$	1
• Dus $\frac{1}{2} = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + 36p}}$	1
• Een exacte berekening waaruit volgt $p=12$	1
• Dus $P(12, 6\sqrt{12})$, dus $OP = \sqrt{12^2 + (6\sqrt{12})^2} = 24$	1
• Dus $x_p = -24$	1
of	
• Als $P(p, 6\sqrt{p})$, dan is $OP = \sqrt{p^2 + 36p}$	1
• Dan geldt $x_p = -\sqrt{p^2 + 36p}$	1
• De lijn door O en P heeft hellingshoek $(180-120)=60^\circ$	1
• De richtingscoëfficiënt van deze lijn is dus $\sqrt{3}$	1
• Als Q de loodrechte projectie van P op de x-as is, dan geldt $PQ = p\sqrt{3}$; er moet gelden $OP^2 = OQ^2 + PQ^2$, dus $p^2 + 36p = p^2 + 3p^2$; dit geeft $3p^2 = 36p$, dus $p=12$ ($p=0$ voldoet niet)	1
• Dus $OP = \sqrt{12^2 + 36 \cdot 12} = 24$, dus $x_p = -24$	1
of	
• Als $P'(-p, 0)$, dan is $OP = p$	1
• De lijn door O en P heeft hellingshoek $(180-120)=60^\circ$	1
• Als Q de loodrechte projectie van P op de x-as is, dan is OQP een $1-2-\sqrt{3}$ -driehoek	1
• Hieruit volgt dat $OQ = \frac{1}{2}p$ en $PQ = \frac{1}{2}p\sqrt{3}$	1
• Dus $6\sqrt{\frac{1}{2}p} = \frac{1}{2}p\sqrt{3}$	1
• Een exacte berekening waaruit volgt $p=24$ ($p=0$ voldoet niet), dus $x_p = -24$	1
of	
• Als $P(p, 6\sqrt{p})$, dan is $OP = \sqrt{p^2 + 36p}$	1
• Dan geldt $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -\sqrt{p^2 + 36p} \\ 0 \end{pmatrix}$	1
• $\cos(120^\circ) = \frac{\begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{p^2 + 36p} \\ 0 \end{pmatrix}}{\left \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \right \cdot \left \begin{pmatrix} -\sqrt{p^2 + 36p} \\ 0 \end{pmatrix} \right }$	1
• Dus $\frac{1}{2} = \frac{-p \cdot \sqrt{p^2 + 36p}}{p^2 + 36p}$	1
• Een exacte berekening waaruit volgt $p=12$	1
• Dus $OP = \sqrt{12^2 + 36 \cdot 12} = 24$, dus $x_p = -24$	1
of	
• Als $P'(-p, 0)$, dan ligt P op de cirkel met middelpunt O en straal p, en die heeft vergelijking $x^2 + y^2 = p^2$	1
• Invullen van $y = 6\sqrt{x}$ geeft $x^2 + 36x = p^2$ voor de x-coördinaat van P	1
• De lijn door O en P heeft hellingshoek $(180-120)=60^\circ$	1
• $x_p = p \cdot \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}p$	1
• Invullen in $x^2 + 36x = p^2$ geeft $(\frac{1}{2}p)^2 + 36 \cdot \frac{1}{2}p = p^2$	1
• Een exacte berekening waaruit volgt $p=24$ ($p=0$ voldoet niet), dus $x_p = -24$	1

Figuur 2: fragment van het correctievoorschrift vwo wiskunde B 2021-1. Bron:

<https://www.examenblad.nl/examendocument/2021/cse-1/wiskunde-b-vwo/correctievoorschrift/2021/f=VW-1025-a-21-1-c.pdf>

De opzet van correctievoorschriften bij natuurkunde verschilt van die van wiskunde. Bij wiskunde staat per vraag de uitwerking in stappen waaraan bolletjes zijn gekoppeld. Bij natuurkunde wordt gestart met een uitwerking zonder dat er scorepunten vermeld worden. Zie bijvoorbeeld figuur 3.

3 maximumscore 3	
voorbeeld van een antwoord:	
De stroomsterkte $I = \frac{P}{U} = \frac{5000}{230} = 21,7$ (A), de zekering van 25 A is dan het meest geschikt.	
Zekeringen tot en met 20 A branden allemaal door, de zekering van 40 A geeft te weinig bescherming bij overbelasting.	
• gebruik van $P = UI$	1
• inzicht dat te kleine zekeringen doorbranden en te grote te weinig bescherming bieden tegen overbelasting	1
• completeren en consequente conclusie	1
<i>Opmerking</i>	
<i>Er hoeft hier geen rekening gehouden te worden met significantie.</i>	

Figuur 3: voorbeeld van een correctievoorschrift bij natuurkunde. Bron:

<https://static.examenblad.nl/9336117/d/ex2017/HA-1023-a-17-1-c.pdf>

Afhankelijk van wat er in de vraag aan de orde gesteld wordt, wordt als eerste de uiteindelijke 'uitkomst' vermeld dan wel een voorbeeld van een antwoord of een voorbeeld van een berekening. Dan pas volgen de scorebolletjes, zie ook weer figuur 3. De invulling van de scorebolletjes is afwijkend van de wijze waarop we dat tegenwoordig bij wiskunde gewoon zijn. Het zijn niet zozeer de concrete berekeningsstappen die bepunt worden als wel de inzichtelijkere

aspecten die ten grondslag liggen aan de berekeningen. Pas in het laatste bolletje komen de berekeningen zelf aan de orde via de term ‘completeren’ dan wel ‘completeren van de berekening’.

Het punt van completeren bleek bij wiskunde wat anders te liggen dan bij natuurkunde omdat het bij wiskunde vaak gaat om de berekening. Ook bleek tijdens de constructie en in gesprekken met de vaststellingscommissie van het College voor Toetsen en Examens (CvTE) dat er behoefte is aan een onderscheid met betrekking tot inzicht. Dit heeft geresulteerd in het volgende onderscheid.

1. **inzicht dat:** in de betreffende stap (‘cv-bolletje’) moet duidelijk zijn dat de leerling over het betreffende inzicht beschikt heeft; een concrete of correcte berekening hoeft **niet** aangetroffen te worden
2. **inzicht hoe:** in de betreffende stap (‘cv-bolletje’) moet duidelijk zijn dat de leerling over het betreffende inzicht beschikt heeft; de essentiële berekeningsstappen dienen **wel** aanwezig te zijn
3. **completeren:** het in detail uitwerken van berekeningen.

We zijn ons ervan bewust dat *inzicht hoe* en *completeren* met elkaar verweven kunnen zijn. Omdat wiskunde meer nog dan natuurkunde op algebraïsch/rekenkundige/technische handelingen gebaseerd is, ontkomen we – zo denken we – er niet aan om meer nadruk op deze aspecten te leggen dan bij de natuurkunde-aanpak gangbaar is.

Na wat vingeroefeningen binnen Cito en overleg met het veld op de Nationale Wiskundedagen van 2019 en 2020 is in samenwerking met de vaststellingscommissie van wiskunde B van CvTE en de constructiegroep van wiskunde B is een alternatief correctievoorschrift tot stand gekomen voor het examen vwo wiskunde B 2021. Een logische vervolgstap was om leerlingwerk te bekijken met dit alternatieve correctievoorschrift en om te zien in hoeverre er verschillen zijn in scores tussen het oude en alternatieve correctievoorschrift.

Onderzoeksvragen

Op basis van het voorgaande zijn we gekomen tot de volgende onderzoeksvraag: welke gevolgen heeft het alternatieve correctievoorschrift voor de scores van leerlingen?

Om deze vraag te kunnen beantwoorden

1. Welke correlaties zijn er tussen de scores volgens het reguliere correctievoorschrift en het alternatieve correctievoorschrift?
2. In hoeverre verschillen totaalscores van leerlingen volgens beide correctievoorschriften?
3. Aan welke factoren zijn eventuele verschillen toe te schrijven?

Methode

In juni 2021 zijn van 99 leerlingen hun uitwerkingen verzameld van het examen vwo wiskunde B, eerste tijdvak. Deze 99 leerlingen zijn afkomstig van vier verschillende scholen: drie scholen van leden van de constructiegroep vwo wiskunde B en een school van een toetsdeskundige. Van die school is van twee docenten leerlingwerk verzameld. Totaal is er dus leerlingwerk van vijf verschillende wiskundedocenten. De leerlingwerken zijn geanonimiseerd en verdeeld over de codeurs die de werken hebben gecodeerd aan de hand van het alternatieve correctievoorschrift.

Voor het coderen zijn twee personen aangetrokken: één oud cg-lid van vwo wiskunde B en een zittend lid van de cg. Ook toetsdeskundigen Ruud en Irene hebben gecodeerd. Dat leidde tot het volgende schema van coderen.

Tabel 1: Overzicht van leerlingwerk en codeurs.

Bron gegevens	Docent B	Docent D	Docent H	Docent J	Docent P
# leerlingen	12	25	16	26	20
1e correctie regulier	B	D	H	J	P
1 ^e correctie alternatief	Td R	H	Td R	D	H
2 ^e correctie alternatief	Td I	Td R	D	Td I	Td I

Op deze manier is het werk van elke leerling een keer nagekeken met het reguliere correctievoorschrift (de eigen docent¹) en twee keer met het alternatieve correctievoorschrift (door twee verschillende codeurs). Om met enige betrouwbaarheid uitspraken te kunnen doen, is het van belang dat er zoveel mogelijk overeenkomst is in de coderingen zodat verschillen in coderingen zoveel mogelijk kunnen worden teruggevoerd op het verschil in correctievoorschrift in plaats van op het verschil in codeurs.

Binnen de tijd en mogelijkheden van dit project is daarom gezocht naar een optimale invulling. Per groep leerlingen is ervoor gezorgd dat of Ruud of Irene codeert, degenen die het meest betrokken zijn bij het project. Oorspronkelijk was het idee om per leerling de scores door te spreken en zo te komen tot een definitieve scoring volgens het alternatieve correctievoorschrift. Omdat het coderen veel meer tijd in beslag nam dan begroot, is ervoor gekozen om te werken met het gemiddelde van de scores van de codeurs volgens het alternatieve correctievoorschrift.

¹ De score via het reguliere correctievoorschrift is op basis van alleen de score van de 1^e corrector. De beoordeling door de 2^e corrector is hier om praktische redenen niet in meegenomen.

Resultaten

In dit hoofdstuk worden de resultaten per onderzoeksvraag besproken.

Onderzoeksvraag 1

Welke correlaties zijn er tussen de scores volgens het reguliere correctievoorschrift en het alternatieve correctievoorschrift?

Als eerste is gekeken naar de correlaties tussen de scores volgens het reguliere correctievoorschrift en het alternatieve correctievoorschrift. Zoals hiervoor is beschreven is voor het alternatieve cv uit praktische overwegingen gekeken naar het gemiddelde van beide codeurs. De correlatie tussen de totaalscores van leerlingen volgens het reguliere cv en de gemiddelde score op het nieuwe cv is 0,966. Kijken we meer gedetailleerd, dan blijven de correlaties hoog, zoals te zien is in tabel 2.

Tabel 2: Correlaties tussen scores van leerlingen volgens het reguliere en alternatieve correctievoorschrift.

Correlaties	reg - 1e beoord	reg - 2e beoord	1e beoord - 2e beoord	reg - gemiddelde
Bert	0,890	0,936	0,909	0,936
Dick	0,980	0,962	0,971	0,978
Hugo	0,966	0,975	0,970	0,978
Jan	0,980	0,975	0,971	0,984
Pelle	0,929	0,898	0,953	0,924

De correlatie is het laagst bij docent P. Er is niet verder gekeken naar deze correlatie omdat deze nog steeds heel hoog is.

Onderzoeksvraag 2

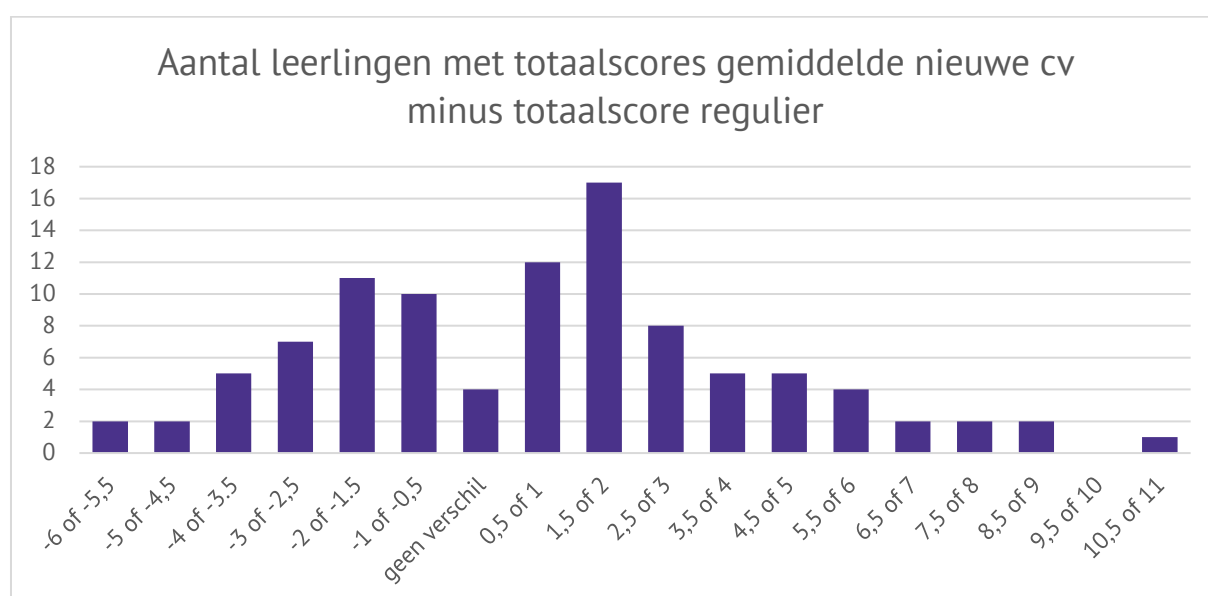
In hoeverre verschillen totaalscores van leerlingen volgens beide correctievoorschriften?

Voor het beantwoorden van de tweede onderzoeksvraag is gekeken naar de totaalscores van de leerlingen. Hiermee wordt bedoeld de som van het aantal behaalde scorepunten per vraag per leerling. De 99 leerlingen hebben volgens het reguliere correctievoorschrift gezamenlijk 4317 scorepunten behaald en volgens het alternatieve correctievoorschrift² 4411. Dat is een verschil van 94 punten. Gemiddeld gesproken krijgen leerlingen dus ongeveer één scorepunt meer volgens het alternatieve correctievoorschrift.

² Ook voor het beantwoorden van deze onderzoeksvraag is gewerkt met de gemiddelde score van de beide beoordelaars volgens het alternatieve correctievoorschrift.

Meer precies gekeken zijn er 37 leerlingen met een lagere totaalscore volgens het nieuwe cv (85,5 scorepunten). Deze leerlingen hebben gemiddeld 2,3 scorepunt minder. Er zijn 58 leerlingen met een hogere totaalscore volgens het nieuwe cv (179,5 scorepunten). Deze leerlingen hebben gemiddeld 3,1 scorepunt meer.

In figuur 4 zijn de verschillen in aantal scorepunten van de score volgens het nieuwe cv minus de score van het reguliere cv in kaart gebracht. Een positief verschil betekent dus een hogere score volgens het nieuwe cv; een negatief verschil betekent een lagere score volgens het nieuwe cv. Zoals opgemerkt zijn er 37 leerlingen met een lagere score volgens het nieuwe cv. Een positief verschil van 1,5 of 2 scorepunten komt het vaakst voor, namelijk bij 17 leerlingen. Verschillen van meer dan 6 scorepunten komen bij negen leerlingen voor. Het grootste verschil is een verschil van meer dan 10 scorepunten.



Figuur 4: Aantal leerlingen per grootte van het verschil in totaalscores gemiddelde van het nieuwe cv minus totaalscores volgens reguliere cv.

Onderzoeksvraag 3

Aan welke factoren zijn eventuele verschillen in totaalscores toe te schrijven?

Om zicht te krijgen op waar de gevonden verschillen vandaan komen, zijn twee verschillende analyses uitgevoerd. Als eerste is gekeken naar de grote verschillen in toekenning van scorepunten door de verschillende beoordelaars. Daarbij is ‘groot’ gedefinieerd als een verschil van meer dan twee scorepunten tussen de beoordeling volgens het reguliere cv en het gemiddelde van de beoordelaars volgens het nieuwe cv. Per vraag is in beeld gebracht welke leerlingen dit betreft en per vraag is geanalyseerd waar het verschil door kan worden verklaard.

Vervolgens is gekeken naar kleine verschillen, dus verschillen van 2 of minder scorepunten tussen de beoordeling volgens het reguliere cv en het gemiddelde van de beoordelaars volgens het nieuwe cv.

Grote verschillen

Als eerste is op vraagniveau gekeken hoe groot de verschillen zijn. De resultaten hiervan zijn te vinden in tabel 3.

Tabel 3: Scoreverschillen gemiddelde score per vraag nieuwe cv – score per vraag regulier.

Score nieuw cv – regulier cv	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
-3 of -2,5	-	1	1	-	2	-	-	-	1	-	-	-	1	1
-2 of -1,5	-	2	1	2	2	1	4	1	3	1	2	3	15	10
-1 of -0,5	7	29	13	25	14	16	25	15	18	13	21	15	22	25
0	68	56	68	50	71	35	53	44	40	55	46	43	48	34
0,5 of 1	20	8	12	20	7	29	13	30	23	29	27	28	6	22
1,5 of 2	3	2	4	2	3	14	4	5	10	1	3	10	6	6
2,5 of 3	1	1	-	-	-	4	-	2	3	-	-	-	1	1
3,5 of 4	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-
4,5 of 5	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-
5,5 of 6	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-

De vraag is waar verschillen in aantallen toegekende scorepunten vandaan komen. Hieronder worden uitwerkingen van leerlingen besproken van vragen waar het verschil groter is dan 2 scorepunten. De verschillen zijn het grootst bij vraag 8.

Vraag 1

Bij deze vraag is er bij één leerling een verschil van meer dan twee scorepunten. Zie tabel 4. Dit verschil is te verklaren door de opzet van het alternatieve correctievoorschrift. De leerling heeft ideeën over hoe de opgave moet worden aangepakt, maar maakt veel fouten in de uitvoering. In het reguliere correctievoorschrift zijn 0 scorepunten toegekend omdat bij elke stap wel iets mis gaat.

Tabel 4: Uitwerking van leerling waarbij het verschil in aantal toegekende scorepunten door codeurs groter is dan twee scorepunten.

Toelichting	Uitwerking leerling
Reguliere score: 0	
Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 2 en 3	
Toelichting: In deze uitwerking lijkt de leerling te weten wat hij moet doen, maar gaat in elke stap wel iets mis. In het reguliere cv geeft dit daarom 0 punten. In het nieuwe cv worden de juiste onderliggende ideeën (gevolgd door een onjuiste berekening) beloond.	<p>Handwritten student work showing a series of steps to solve a problem. The work includes identifying a parabola $y = x^2$ and a line $y = x + b$, finding their intersection points, and then calculating the area between them using integration. The final result is $\frac{863}{12288}$.</p>

Vraag 2

Bij deze vraag zijn er twee leerlingen waarbij er een verschil is in de beoordeling van meer dan twee scorepunten. In tabel 5 staan de uitwerkingen van deze leerlingen. De verschillen lijken voort te komen uit een mengeling van twee factoren: de beloning van ideeën in het nieuwe cv en het verschil in opzet van het reguliere en nieuwe cv. De eerste factor is te zien in de uitwerking van de tweede leerling in tabel 5. De leerling herleidt de vergelijking onjuist, maar zet vervolgens wel relevante stappen in het oplossen van die onjuiste vergelijking die overeenkomen met stappen in het oplossen van de juiste vergelijking. In het nieuwe cv levert dit scorepunten op; in het reguliere cv niet.

De tweede factor zijn verschillen in onderscheiden deelstappen in de correctievoorschriften.

In het reguliere cv is de opbouw (ruw ingekort):

- vergelijking herleiden tot $\sin(x) = \sin(2x)$
- de vergelijking oplossen/ die vergelijking anders schrijven (twee varianten)
- oplossing uitwerken/ die vergelijking oplossen (twee varianten)
- het antwoord

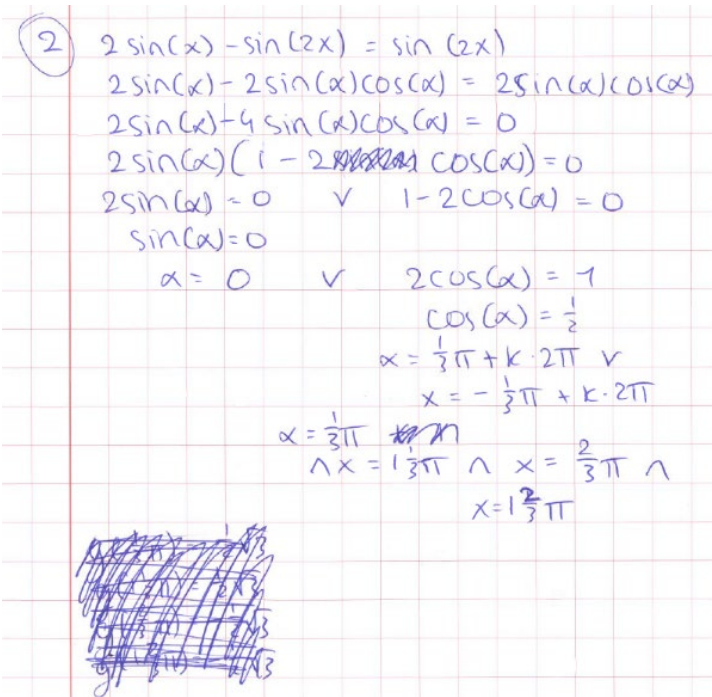
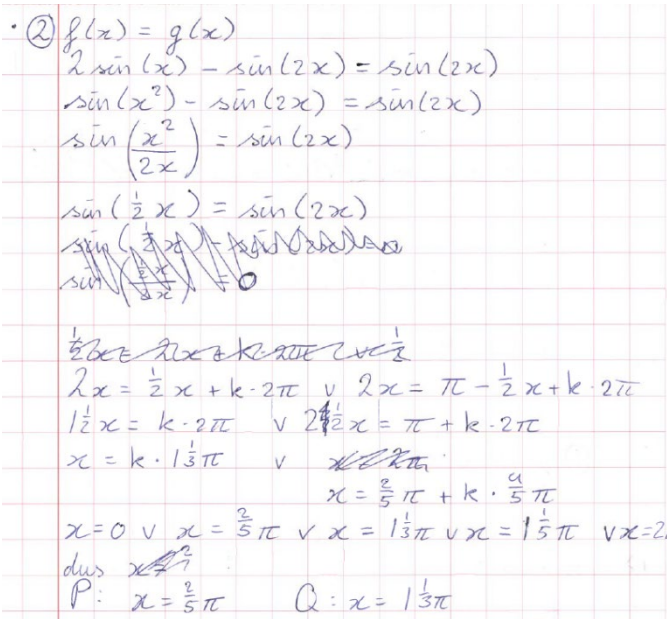
In het nieuwe cv is de opbouw (ruw ingekort):

- vergelijking herleiden tot $\sin(x) = \sin(2x)$
- vergelijking oplossen

- controle welke oplossing hoort bij P en Q
- het antwoord.

Twee verschillen vallen op. Voor het oplossen van de vergelijking worden in het reguliere cv twee scorepunten toegekend, en in het nieuwe cv één. De expliciete controle van welke oplossing hoort bij P dan wel Q wordt niet gevraagd in het reguliere cv.

Tabel 5: Uitwerking van leerlingen waarbij het verschil in aantal toegekende scorepunten door codeurs groter is dan twee scorepunten.

Toelichting	Uitwerking leerling
<p>Reguliere score: 4 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 1 en 2</p>	
<p>Toelichting: Reden voor het verschil is dat niet duidelijk is hoe gecontroleerd wordt welke oplossingen bij P en Q horen. Dat is een expliciet bolletje in het nieuwe cv. In het reguliere cv is de koppeling tussen de oplossingen en P en Q impliciet gelaten. Regulier: 3 scorepunten voor het oplossen van de vergelijking; in nieuw cv 2 scorepunten.</p>	<p>Reguliere score: 0 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 2 en 3</p>
<p>Toelichting: De leerling herleidt de vergelijking op een verkeerde manier, maar de wijze waarop hij verder gaat, is wel juist. Met het nieuwe cv levert dat punten op.</p>	

Vraag 3

Bij vraag 3 is er één leerling met een verschil van meer dan 2 scorepunten. De uitwerkingen van deze leerling staan in tabel 6. Het verschil in score is hier terug te voeren op een onzorgvuldigheid in de beoordeling van één van de correctoren. De primitieve die de leerling heeft, is onjuist en onterecht als juist aangemerkt.

Tabel 6: Uitwerking van leerling waarbij het verschil in aantal toegekende scorepunten door codeurs groter is dan twee scorepunten.

Toelichting	Uitwerking leerling
<p>Reguliere score: 5 (maximum) Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 2 en 3</p>	<p>3</p> $f(x) = 2 \sin(x) - \sin(2x) = 2 \sin(x) - 2 \sin(x) \cos(x)$ $h(x) = 1 + \sin(2x) = 1 + 2 \sin(x) \cos(x)$ $F(x) = -2 \cos(x) + \cos(x + \frac{1}{4}\pi) \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$ $H(x) = x - \cos(x + \frac{1}{4}\pi) \sin(x + \frac{1}{4}\pi)$ $\int_{1,33}^{2,97} (f(x) - h(x)) dx$ $= \int_{1,33}^{2,97} (2 \sin(x) - 2 \sin(x) \cos(x) - 1 - 2 \sin(x) \cos(x)) dx$ $= [-2 \cos(x) + \cos(x + \frac{1}{4}\pi) \sin(x + \frac{1}{4}\pi) - x + \cos(x + \frac{1}{4}\pi) \sin(x + \frac{1}{4}\pi)]_{1,33}^{2,97} \approx 2,6$
<p>Toelichting: De beoordelaar met 5 scorepunten heeft een fout gemaakt. De leerling heeft verkeerd geïntegreerd. De toekenning van alle scorepunten hier is niet terecht.</p>	<p>Dus de oppervlakte van $V \approx 2,6$.</p>

Vraag 4

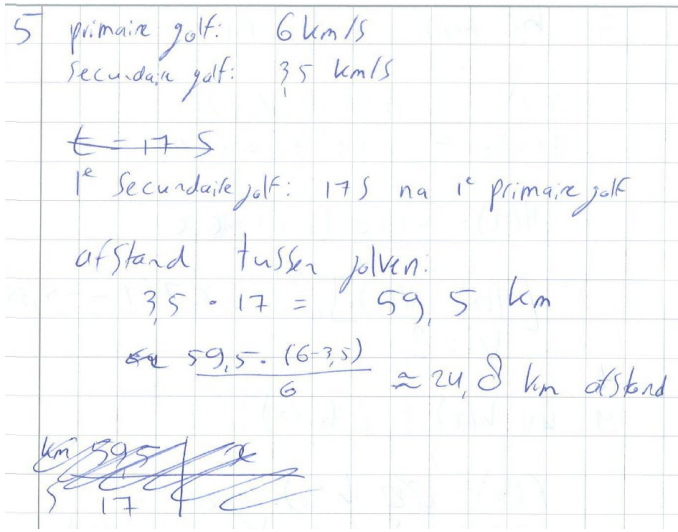
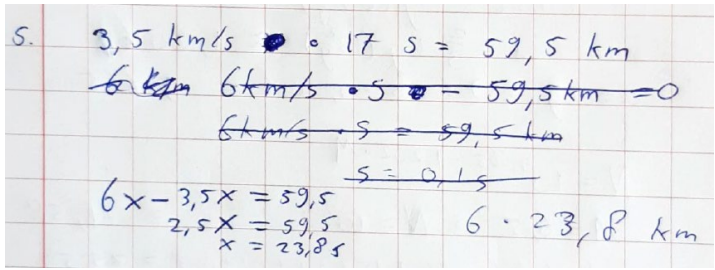
Bij vraag 4 kwam een verschil van meer dan 2 scorepunten niet voor.

Vraag 5

Bij deze vraag zijn er twee leerlingen waarbij er een verschil is in de beoordeling van meer dan twee scorepunten. Zie tabel 7. Bij de eerste leerling is sprake van een onzorgvuldigheid in de beoordeling. De reguliere score van 3 is niet terecht.

Bij de tweede leerling is ook sprake van een onzorgvuldigheid in de beoordeling. De beoordelaars met het nieuwe cv hebben beide 0 scorepunten toegekend, terwijl de leerling wel degelijk goede stappen zet.

Tabel 7: Uitwerking van leerlingen waarbij het verschil in aantal toegekende scorepunten door codeurs groter is dan twee scorepunten.

Toelichting	Uitwerking leerling
<p>Reguliere score: 3 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 0 en 1</p>	 <p>5 primaire golf: 6 km/s Secundaire golf: 3,5 km/s</p> <p>$t = 17\text{ s}$ 1^e Secundaire golf: 17 s na 1^e primaire golf</p> <p>afstand tussen golven: $3,5 \cdot 17 = 59,5\text{ km}$</p> <p>59,5 $\frac{59,5 \cdot (6 - 3,5)}{6} \approx 23,8\text{ km afstand}$</p> <p>km 59,5 5 17</p>
<p>Reguliere score: 3 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 0 en 0</p>	 <p>5. $3,5\text{ km/s} \cdot 17\text{ s} = 59,5\text{ km}$ 6 km $6\text{ km/s} \cdot 5\text{ s} = 59,5\text{ km} = 0$ 6 km/s $6\text{ km/s} \cdot 5\text{ s} = 59,5\text{ km}$</p> <p>$6x - 3,5x = 59,5$ $2,5x = 59,5$ $x = 23,8\text{ s}$</p> <p>5 = 0,15 $6 \cdot 23,8\text{ km}$</p>
<p>Toelichting: Beoordelingen nieuwe cv lijken onjuist, stappen zijn wel gezet. Alleen completeerpunt mist. Leerling kiest onduidelijke aanpak en schrijft dat niet handig op. Toekenning van 0 scorepunten is niet terecht.</p>	

Vraag 6

Bij deze vraag zijn er vier leerlingen waarbij er een verschil is in de beoordeling van meer dan twee scorepunten. Zie tabel 8. Bij de eerste drie leerlingen zijn de verschillen te verklaren vanuit de opzet van het nieuwe cv. Er worden fouten gemaakt, maar leerlingen laten zien dat ze weten welke stappen er gezet moeten worden.

Bij de vierde leerling is sprake van een onzorgvuldigheid in de beoordeling. In de vraag staat dat de oplossing algebraïsch gevonden moet worden. Dat is niet gebeurd bij die leerling, terwijl daar wel scorepunten voor te lijken zijn toegekend.

In het reguliere cv komt het algebraïsch oplossen vanzelfsprekend aan bod, in het nieuwe cv blijft dat impliciet, valt het onder 'het inzicht hoe'. Wellicht is het raadzaam om hierover iets op te nemen in het nieuwe cv of in de beschrijving van wat er wordt verstaan onder het inzicht hoe.

Tabel 8: Uitwerkingen van leerlingen waarbij het verschil in aantal toegekende scorepunten door codeurs groter is dan twee scorepunten.

Toelichting

Uitwerking leerling

Reguliere score: 1

Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 3 en 5

Toelichting: leerling laat zien dat hij weet wat hij moet doen, maar kiest voor GR-aanpak wat niet de bedoeling is. Aanpak levert punten op in het nieuwe cv.

$(x-192)^2 + (y-128)^2 = 1600$
 $CS: x^2 + y^2 = 14000$
 $y = \sqrt{14000 - x^2}$
 Substitueren in GT geeft:
 $(x-192)^2 + (14000 - x^2 - 128)^2 = 1600$
 $x^2 - 384x + 36864 + (14000 - x^2 - 256\sqrt{14000 - x^2} + 16384) = 1600$
 $-384x + 36864 + 14000 - 256\sqrt{14000 - x^2} + 16384 = 1600$
 $-256\sqrt{14000 - x^2} = 384x - 66048$
 $\sqrt{14000 - x^2} = \frac{384x - 66048}{-256} = -1.49609375x + 257.96875$
 $(14000 - x^2) = (-1.49609375x + 257.96875)^2$
 $14(1400 - x^2) = 2.24x^2 - 7.44x + 66560$

$GT: (x-192)^2 + (y-128)^2 = 1600 \rightarrow *$
 $CS: x^2 + y^2 = 14000$
 $y = \sqrt{14000 - x^2}$
 Substitueren in GT geeft:
 $* x^2 - 384x + 36864 + y^2 - 256y + 16384 = 1600$
 $14000 - 384x + 36864 + 14000 - 256\sqrt{14000 - x^2} + 16384 = 1600$
 $-384x + 67648 - 256\sqrt{14000 - x^2} = 1600$
 $-384x - 256\sqrt{14000 - x^2} = -66048$
 $y_1 = -384x - 256\sqrt{14000 - x^2}$
 $y_2 = -66048$
 geeft:
 $(x-192)^2 + (\sqrt{14000 - x^2} - 128)^2 = 1600$
 $y_1 = (x-192)^2 + (\sqrt{14000 - x^2} - 128)^2$
 $y_2 = 6400$
 intersect geeft: $x = 144$ en $x = 232$
 $(144, 6400)$ en $(232, 6400)$

Toelichting

Uitwerking leerling

Reguliere score: 2

Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 5 en 5

Toelichting: deze leerling laat zien dat hij/zij weet wat hij/zij moet doen, maar maakt in de uitvoering een paar fouten. De aanpak levert punten op in het nieuwe cv.

6

$T(192, 128)$

$C_1: m(192, 128) \text{ en } r = 80$

$C_2: m(0, 0) \text{ en } r = 240$

$C_1: (x - 192)^2 + (y - 128)^2 = 80^2$

$C_2: x^2 + y^2 = 240^2$

$C_1: x^2 - 384x + 36864 + y^2 - 256y + 16384 = 6400$

$x^2 + y^2 - 384x - 256y = -46848$

$C_1: x^2 + y^2 = 240^2$

$C_2: x^2 + y^2 - 384x - 256y = -46848$

$384x + 256y = 104448$

$384x = 104448 - 256y$

$x = \frac{104448 - 256y}{384}$

$C_1: x^2 - 384x + 36864 + y^2 - 256y + 16384 = 6400$

$x^2 + y^2 - 384x - 256y = -46848$

$x = \frac{104448 - 256y}{384}$

invullen bij C_1 geeft

$\left(\frac{104448 - 256y}{384}\right)^2 + y^2 = 240^2$

$\frac{(104448)^2 - 2 \cdot 104448 \cdot 256y + (256y)^2}{(384)^2} + y^2 = 240^2$

$\frac{10914480000 - 53477376y + 65536y^2}{147456} + y^2 = 57600$

$10914480000 - 53477376y + 65536y^2 + 147456y^2 = 57600 \cdot 147456$

$10914480000 - 53477376y + 213000y^2 = 8468224000$

$213000y^2 - 53477376y + 2446256000 = 0$

$y^2 - \frac{53477376}{213000}y + \frac{2446256000}{213000} = 0$

$y = \frac{53477376}{426000} \pm \sqrt{\left(\frac{53477376}{426000}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2446256000}{213000}}$

invullen bij $x = \frac{104448 - 256y}{384}$ geeft

$x = 104447 \cup x = 195706$

Toelichting

Reguliere score: 0

Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 2 en 4

Toelichting: leerling laat zien dat hij weet wat hij moet doen, maar maakt in de uitvoering een paar fouten. De aanpak levert punten op in het nieuwe cv.

Uitwerking leerling

6.
$$y - (x - 192)^2 + (y - 128)^2 = 80^2 = x^2 + y^2 - 240^2$$

$$x^2 - 384x + 192^2 + y^2 - 256y + 128^2 = x^2 + y^2 - 240^2$$

$$(x - 192)^2 + (y - 128)^2 = 80^2$$

$$y^2 = -x^2 - 240^2 \quad y = \sqrt{-x^2 - 240^2}$$

$$x^2 \text{ invoeren van } y$$

$$x^2 - 384x + 192^2 + (-x^2 - 240^2) - 128^2 = (-x^2 - 240^2)$$

$$-240^2$$

$$\Rightarrow -16768x = -1638x^2 - 384x + 205825 = 0$$

$$D = 384^2 - 4 \cdot (-1638) \cdot 205825 =$$

Reguliere score: 1

Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 2 en 5

Toelichting:

De berekening staat niet uitgewerkt, maar leerling weet wel wat er moet gebeuren. Met afronding gaat het mis. Daarom 5 punten. Beoordelaar met 5 punten is te gul want berekening moest algebraïsch en dat heeft de leerling niet gedaan.

Inzicht: algebraïsch als woord opnemen in cv, is er nu niet uit te halen, toevoegen aan inzicht hoe?

6.
$$d(S, T) = \sqrt{(192)^2 + (128)^2} = \sqrt{55008} \approx 230,755$$

$$C_S: x^2 + y^2 = 240^2 \quad x + y = 240$$

$$C_T: (x - 192)^2 + (y - 128)^2 = 80^2$$

$$y = 240 - x$$

$$(x - 192)^2 + (240 - x - 128)^2 = 80^2$$

$$x = 117 \quad y = 240 - 117 = 123$$

$$(117, 123)$$

$$(216, 106)$$

Zie vervolg na 14.

vervolg 6. C_S in C_T substitueren en dan krijg je $x = 145$ \vee $x = 232$ daaraft volgt $(145, 192)$ en $(232, 59)$

Vraag 7

Bij vraag 7 kwam een verschil van meer dan 2 scorepunten niet voor.

Vraag 8

Bij deze vraag zijn er vier leerlingen waarbij er een verschil is in de beoordeling van meer dan twee scorepunten. Zie tabel 9. Bij drie leerlingen lijkt er sprake van onjuistheden in de beoordelingen. Bij de vierde leerling is het verschil te verklaren uit de opzet van het nieuwe cv: wel goede ideeën maar meerdere onjuistheden in de uitwerking.

Tabel 9: Uitwerkingen van leerlingen waarbij het verschil in aantal toegekende scorepunten door codeurs groter is dan twee scorepunten.

Toelichting	Uitwerking leerling
<p>Reguliere score: 2 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 4 en 5</p> <p>Toelichting: Hier lijkt sprake van onjuistheden in de beoordeling. De reguliere score zou 3 moeten zijn, want bol 1, 2 en 4 staan er. Leerling maakt fout (bij wortels vermenigvuldigen gebeuren rare dingen) maar lijkt stappen wel te snappen.</p>	
<p>Reguliere score: 1 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 5 en 6</p> <p>Toelichting: Ook hier lijkt sprake van onjuistheden in de beoordeling. De beoordelaars volgens het nieuwe cv zijn met 5 en 6 te gul; 3 à 4 is redelijk. Verschil ook in stappen die fout zijn maar wel duiden op iets van inzicht. leerling schrijft weinig op, maakt uitwerking lastig te beoordelen. Zijn overgeslagen rekenstappen goed beredeneerd?</p>	

Toelichting

Reguliere score: 0

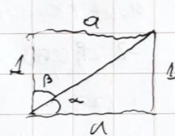
Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 5 en 6

Toelichting:

Uitwerking is ongewoon maar juist. Reguliere beoordelaar heeft dit ten onrechte fout gerekend.

Uitwerking leerling

8 $\angle PCA$ is $\arctan(-1) - \arctan\left(\frac{1}{p}\right)$
 $\angle ACQ$ is $\arctan\left(-\frac{1}{p}\right) - \arctan(-1) \approx \arctan(-1) - \arctan(-p)$
 $\arctan\left(-\frac{1}{p}\right) + \arctan(p) = 2\arctan(-1) = 90^\circ$
 hierin volgt dat
 $\arctan\left(-\frac{1}{p}\right) + \arctan(-p) = 90^\circ$
 in dit geval is
 $-p = a$
 dus de hoeken zijn
 inderdaad gelijk



$\beta + \alpha = 90^\circ$
 $\arctan(a) = \beta$
 $\arctan\left(\frac{1}{a}\right) = \alpha$
 $\arctan(a) + \arctan\left(\frac{1}{a}\right) = 90^\circ$

Reguliere score: 1

Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 3 en 5

Toelichting:

Leerling maakt fout (geen wortel in de noemers, absoluutstrepen ontbreken) maar lijkt stappen wel te snappen. Verschil zit in nieuw cv. Leerling heeft meerdere juiste ideeën wat hij moet doen.

8 $\vec{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$ $\vec{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}} = \frac{p+1}{p^2+2} = \frac{p+1}{2p^2+2}$$

hoek \vec{CA} $\vec{CA} = \vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\cos\left(\frac{1}{p}\right)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}} = \frac{\frac{1}{p} + 1}{\left(\frac{1}{p} + 1\right) \cdot 2} = \frac{\frac{1}{p} + 1}{2\frac{1}{p} + 2} = \frac{p+1}{2p^2+2}$$

Beide hoeken zijn hetzelfde dus voor elke p zullen de hoeken tussen \vec{CP} en \vec{CA} en \vec{CA} en \vec{CA} gelijk zijn

Vraag 9

Bij deze vraag zijn er vijf leerlingen waarbij er een verschil is in de beoordeling van meer dan twee scorepunten. Zie tabel 10. Bij de uitwerking van de eerste leerling lijkt sprake van een onzorgvuldigheid in de beoordeling. De aanpak van de leerling is atypisch, misschien dat de juistheid daarom niet is herkend. De gekozen aanpak is zowel in het reguliere cv als in het nieuwe cv niet beschreven. Veel stappen zijn juist, maar er zitten ook rekenfouten in.

De verschillen in beoordeling van de andere vier leerlingen zijn grotendeels te verklaren uit de opzet van het nieuwe cv: leerlingen weten wat ze moeten doen, maar maken fouten in hun uitwerkingen.

Tabel 10: Uitwerkingen van leerlingen waarbij het verschil in aantal toegekende scorepunten door codeurs groter is dan twee scorepunten.

Toelichting	Uitwerking leerling						
<p>Reguliere score: 5 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 1 en 4</p>	<p> $pR = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}$ $Qm = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $PM = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ </p> <p> $OP = p$ </p> <p> $PM = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ </p> <p> $PA = 1 - p$ </p> <p> $PQM \sim PBA$ </p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>$\frac{PQ}{PB}$</td> <td>$\frac{QM}{BA}$</td> <td>$\frac{PM}{PA}$</td> </tr> <tr> <td>$\frac{\frac{1}{2}-p}{1-p}$</td> <td>$\frac{\frac{1}{2}}{1}$</td> <td>$\frac{1-p}{1-p}$</td> </tr> </table> <p> $f(x) = \frac{1}{p} - p(1-p) = \frac{1}{\sqrt{1+(1-p)^2}} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p\right)^2 + \frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}}$ </p> <p>GR intersekt geeft $p \approx 0,65$</p> <p> $V_{PQR} = \frac{1}{2} \cdot (1-p) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p\right)$ </p> <p> $QM = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ </p> <p> $QM = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}p + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{4}}$ </p> <p> $QM = \sqrt{\frac{1}{4}p^2 + \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}p + 1,5}$ </p> <p>geen</p> <p> $p \approx 2,72$ </p> <p>GR intersekt geeft $p \approx 2,72$ (niet in $[0,1]$)</p>	$\frac{PQ}{PB}$	$\frac{QM}{BA}$	$\frac{PM}{PA}$	$\frac{\frac{1}{2}-p}{1-p}$	$\frac{\frac{1}{2}}{1}$	$\frac{1-p}{1-p}$
$\frac{PQ}{PB}$	$\frac{QM}{BA}$	$\frac{PM}{PA}$					
$\frac{\frac{1}{2}-p}{1-p}$	$\frac{\frac{1}{2}}{1}$	$\frac{1-p}{1-p}$					

Toelichting

Reguliere score: 2

Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 5 en 6

Toelichting: leerling weet wat hij moet doen maar maakt fouten.

Aanpak wel punten in nieuwe cv.

Uitwerking leerling

$\vec{p}\vec{b} = \vec{b} - \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}$
 $\vec{p}\vec{b} \cdot \vec{a}\vec{m} = 0$ want $\vec{p}\vec{b} \perp \vec{a}\vec{m}$
 ~~$\vec{a}\vec{m} = \vec{m} - \vec{q} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2p \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2p - 1/p \\ 1/2 \end{pmatrix}$~~
 $\vec{a}\vec{m} = \vec{m} - \vec{q} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2p \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/p \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2p - 1/p \\ 1/2 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/2 - 1/2p - 1/p \\ 1/2 \end{pmatrix} = 0$

$m = \frac{1}{2}$
 $y_B - y_P = 1 - 0 = 1$
 $\frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} = y_m$
 $x_B - x_P = 1 - p$
 $\frac{1}{2} \cdot (1-p) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p = x_m$
 dus $m \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p, \frac{1}{2} \right)$

$\frac{1}{2} - \frac{p^2}{2p} - \frac{1}{2p} = \frac{1}{2} - \frac{p^2+1}{2p}$

$\begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$
 ~~$\begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$~~
 $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{p} - \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p^2 + 1 \right) = 0$ $(1-p) \left(\frac{1}{2} - \frac{p^2+2}{2p} \right)$
 $\left(\frac{1}{2}p^2 - p - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} \right) = 0$ $\frac{p^2-2p}{2p}$
 ~~$\frac{p^2-2p}{2p} - \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} = 0$~~
 ~~$\frac{p^2-2p-1}{2p} + \frac{1}{2} = 0$~~
 ~~$\frac{p^2-2p-1}{2p} + \frac{1}{2} = 0$~~
 $\frac{1}{2}p^2 - p - \frac{1}{p} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$ $(1-0,62) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot 0,62 \right) - \frac{1}{2}$
 Waer in $y_1 = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$
 ~~$y_2 = -\frac{1}{2}$~~
 Intersect geeft $x \approx 0,624$
 dus $p \approx 0,64$

Toelichting

Reguliere score: 3
Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 5 en 6

Toelichting: ook hier wordt
aanpak beloond in nieuw cv ook
al is de uitvoering niet juist

Uitwerking leerling

8. $P(p,0)$ $B(1,1)$
 $\vec{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}$

M $x_m = \frac{1}{2}(1+p) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}p$
 $y_m = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$
 Dus $M(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p, \frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p, \frac{1}{2})$

$\vec{MQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p) \\ 0 - \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $(\vec{p}) \perp (\vec{q})$

loodrecht dus
 $\begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{p} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$
 $(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}p - \frac{1}{2}) \cdot (-\frac{1}{2}) = 0$ dus $\frac{1}{p} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p^2 = \frac{1}{2}$
 verder volgende
 blad

9. Verder.

$y_1 = x - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$
 $y_2 = \frac{1}{2}$

calc intersect geeft: $x = 0,47346...$
 $x = 0,47$

Dus
 $p = 0,47$

Toelichting

Uitwerking leerling

Reguliere score: 1
 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 3 en 4

Toelichting: ook hier heeft leerling goede aanpak, maar uitvoering gaat niet goed. Aanpak wordt beloond in nieuwe cv.

9) $M = \left(\frac{p+1}{2}, \frac{1+0}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$

$B(1,1)$
 $P(p,0)$

~~$QM = \left(\frac{1+p+\frac{1}{2}}{2}, \frac{1+0+\frac{1}{2}}{2} \right) = \left(\frac{1}{2}p + \frac{3}{4}, \frac{3}{4} \right)$~~

PM PB: $y = ax + b$
 $a = \frac{dy}{dx} = \frac{1-0}{1-0} = 1-p$ } $y = (1-p)x + b$
 door $(1,1)$ geeft
 $1 = (1-p) \cdot 1 + b$
 $b = 1 - 1 + p = p$
 $b = p$
 dus PB: $y = (1-p)x + p$

QM: $y = ax + b$
 $a = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = p + 1 - \frac{1}{p}$

$Q\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
 $M\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

46) $QM \perp PB$ dus
 $r_{QM} \cdot r_{PB} = -1$
 $\left(p + 1 - \frac{1}{p}\right) \cdot (1-p) = -1$

$\Rightarrow p + 1 - \frac{1}{p} - p^2 - p + \frac{1}{p} = -1$
 $-p^2 + 2 = -1$
 $p^2 + 2 - 4 = 0$
 $p^2 - 2 = 0$
 $p = \sqrt{2} = 1,26$

Reguliere score: 1
 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 3 en 5

Toelichting: ook hier heeft leerling goede aanpak, maar uitvoering gaat niet goed. Aanpak wordt beloond in nieuwe cv.

9) Lijnstuk PB opstellen: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-p} = r_{PB}$

$y = \frac{1}{(1-p)}x + b$
 $1 = \frac{1}{(1-p)} \cdot 1 + b$
 $b = 1 - \frac{1}{1-p}$

$y = \frac{1}{(1-p)}x + 1 - \frac{1}{1-p}$

Lijnstuk QM opstellen: $r_{PB} \cdot r_{QM} = -1$
 $\frac{1}{1-p} \cdot r_{QM} = -1$
 $r_{QM} = -1 + p$

$M: \frac{1}{2}(p+1) - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}$
 $\frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2}$
 $M\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$y = (-1+p)x + b$
 $\frac{1}{2} = (-1+p) \cdot \frac{1}{2} + b$
 $0 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + b$
 $b = -1 + \frac{1}{p}$

$y = (-1+p)x - 1 + \frac{1}{p}$
 Minuten in QM

~~$y = (-1+p)x + \frac{1}{p} - 1$~~

Min $\frac{1}{2} = (-1+p)\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\right) - 1 + \frac{1}{p}$

Andere aanpak dan beschreven

Ook in het nieuwe cv zijn uitwerkingen van leerlingen die niet beschreven zijn in het cv soms moeilijk in te passen. Een voorbeeld hiervan is de uitwerking van de leerling bovenin tabel 10.

Hierin moet een waarde van p berekend worden zodat twee lijnstukken loodrecht op elkaar komen te staan. Omdat de hele opgave gaat over vectoren, is het cv opgebouwd rondom het redeneren met vectoren. De uitwerking van de leerling uit tabel 10 is echter aan de hand van gelijkvormige driehoeken, wat op zich een prima optie is. De inzichten die zijn beschreven in het alternatieve correctievoorschrift zijn niet direct te vertalen zijn naar een uitwerking rondom gelijkvormigheid.

Vraag 10, 11 en 12

Bij deze vragen kwamen geen verschillen van meer dan 2 scorepunten voor.

Vraag 13

Bij deze vraag zijn er twee leerlingen waarbij er een verschil is in de beoordeling van meer dan twee scorepunten. Zie tabel 11. Bij de eerste leerling heeft één van de beoordelaars met het nieuwe cv de juiste uitwerking niet herkend. Hier is dus sprake van een onzorgvuldigheid in de beoordeling. Het verschil in scorepunten bij de uitwerking van de tweede is grotendeels te verklaren uit de opzet van het nieuwe cv: de leerling weet wat te doen, maar maakt fouten in de uitwerking.

Tabel 11: Uitwerkingen van leerlingen waarbij het verschil in aantal toegekende scorepunten door codeurs groter is dan twee scorepunten.

Toelichting

Reguliere score: 6
 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 1 en 6

Toelichting:
 De beoordelaar met 1 scorepunt
 lijkt een fout te hebben gemaakt.
 De uitwerking is juist.

Uitwerking leerling

B $|AB| \cdot 3 = |BC|$ $|\ln(x)| :$
 $A(0, q)$ $\ln(x)$ voor $\ln(x) \geq 0 \rightarrow x \geq 1$
 $-\ln(x)$ voor $\ln(x) < 0 \rightarrow x < 1$

$|\ln(x)| = q$

$\ln(x) = q \vee -\ln(x) = q$
 $x = e^q \quad \ln(x) = -q$
 $\downarrow \quad \quad \quad x = e^{-q} = \frac{1}{e^q}$
 C $\quad \quad \quad \downarrow$
 B

~~$|AB| = \frac{1}{e^q}$~~
 ~~$|BC| = e^q - \frac{1}{e^q}$~~

$|AB| = \frac{1}{e^q} \quad |BC| = e^q - \frac{1}{e^q}$

$|AB| \cdot 3 = |BC|$ geeft

$3 \cdot \frac{1}{e^q} = e^q - \frac{1}{e^q}$ $\rightarrow 3 = e^q \cdot e^q - 1$
 $\frac{3}{e^q} = \frac{e^q \cdot e^q}{e^q} - \frac{1}{e^q}$ $3 = e^{2q} - 1$
 $\frac{3}{e^q} = \frac{e^q \cdot e^q - 1}{e^q}$ $4 = e^{2q}$
 $2q = \ln(4)$
 $q = \frac{1}{2} \ln(4)$

Reguliere score: 0
 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 2 en 3

Toelichting: goede elementen in
 de uitwerking maar fouten in
 uitwerking. Dus punten in nieuw
 cv en geen in regulier.

B $A(0, q) \quad B(-e^q, q) \quad C(e^q, q)$
 $|\ln(x)| = q$
 $x = e^q \vee x = -e^q$

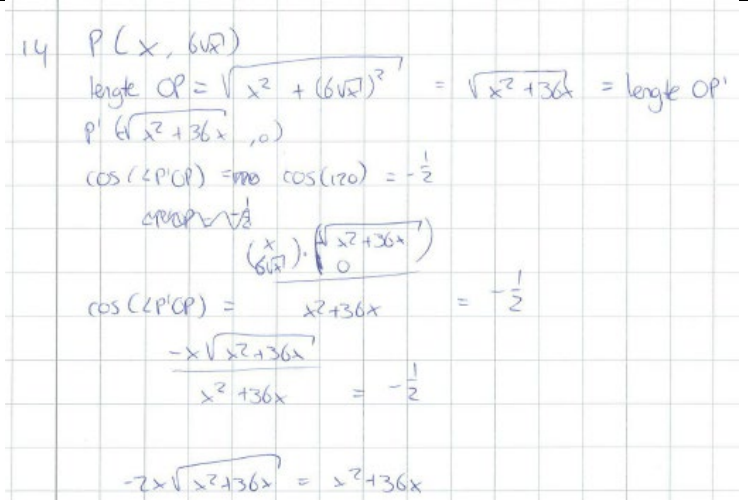
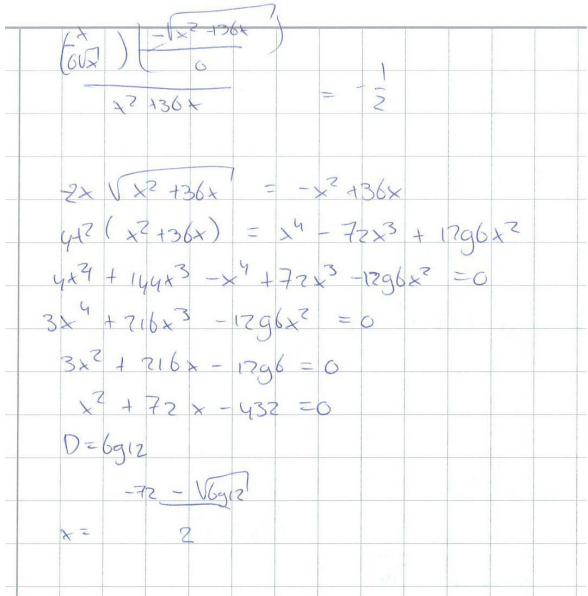
$AB = \sqrt{(0 - e^q)^2 + (q - q)^2} = \sqrt{e^{2q} + 2q^2}$
 $BC = \sqrt{(e^q - e^q)^2 + (q - q)^2} = \sqrt{2q^2}$

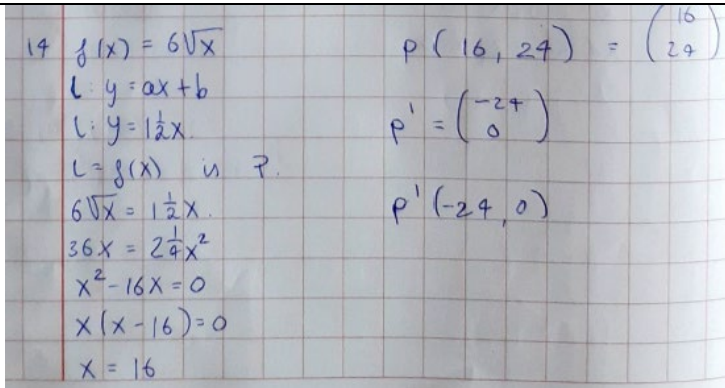
$3 \cdot AB = BC$
 $3 \sqrt{e^{2q} + 2q^2} = \sqrt{2q^2}$
 $9(e^{2q} + 2q^2) = 2q^2$
 $9e^{2q} + 18q^2 = 2q^2$
 $9e^{2q} + 16q^2 = 0$
 $16q^2 = -9e^{2q}$
 $4q^2 = -\frac{9}{4} e^{2q}$

Vraag 14

Bij deze vraag zijn er twee leerlingen waarbij er een verschil is in de beoordeling van meer dan twee scorepunten. Zie tabel 12. Bij de uitwerking van de eerste leerling lijkt sprake van een onzorgvuldigheid in de beoordeling volgens het nieuwe cv. Er zijn respectievelijk 1 en 2 scorepunten toegekend terwijl vier scorepunten redelijk zijn. Het kan zijn dat beoordelaars een deel van de uitwerking dat op een ander blad stond, gemist hebben. Wellicht is dat een verklaring. Het verschil in scorepunten bij de uitwerking van de tweede leerling is grotendeels te verklaren uit de opzet van het nieuwe cv: de leerling weet wat te doen, maar maakt fouten in de uitwerking.

Tabel 12: Uitwerkingen van leerlingen waarbij het verschil in aantal toegekende scorepunten door codeurs groter is dan twee scorepunten.

Toelichting	Uitwerking leerling
<p>Reguliere score: 4 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 1 en 2</p> <p>Toelichting: Deel van uitwerking staat op ander blad, misschien dat beoordelaars dat gemist hebben. Onderdelen zijn wel juist, score van 4 is redelijk.</p>	 <p>14 $P(x, 6\sqrt{x})$ lengte $OP = \sqrt{x^2 + (6\sqrt{x})^2} = \sqrt{x^2 + 36x} = \text{lengte } OP'$ $P'(\sqrt{x^2 + 36x}, 0)$ $\cos(\angle P'OP) = \cos(120) = -\frac{1}{2}$ $\cos(\angle P'OP) = \frac{(x, 6\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x^2 + 36x}, 0)}{x^2 + 36x} = -\frac{1}{2}$ $\frac{-x\sqrt{x^2 + 36x}}{x^2 + 36x} = -\frac{1}{2}$ $-2x\sqrt{x^2 + 36x} = x^2 + 36x$</p>  <p>$\frac{(x, 6\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x^2 + 36x}, 0)}{x^2 + 36x} = -\frac{1}{2}$ $-2x\sqrt{x^2 + 36x} = -x^2 + 36x$ $4x^2(x^2 + 36x) = x^4 - 72x^3 + 1296x^2$ $4x^4 + 144x^3 - x^4 + 72x^3 - 1296x^2 = 0$ $3x^4 + 216x^3 - 1296x^2 = 0$ $3x^2 + 216x - 1296 = 0$ $x^2 + 72x - 432 = 0$ $D = 6912$ $\frac{-72 \pm \sqrt{6912}}{2}$ $x = 2$</p>

Toelichting	Uitwerking leerling
Reguliere score: 0 Beoordelaar 1, 2 nieuw cv: 3 en 3 Toelichting: Elementen in redenering juist, maar stappen niet goed dus in reguliere cv geen punten.	

Samengevat

Hierboven zijn verschillen in beoordeling besproken en is per uitwerking gekeken hoe deze verschillen te verklaren zijn. Voor de volledigheid is in tabel 13 een overzicht opgenomen van de redenen. Bij 7 van de 23 uitwerkingen waarin verschillen tussen beoordelaars zijn geconstateerd van meer dan 2 scorepunten is sprake van onzorgvuldigheden in de beoordeling. In 16 van de 23 uitwerkingen is een verschil in beoordeling te verklaren door de opzet van het nieuwe cv.

Tabel 13: Aantal verklaringen van verschillen in aantal toegekende scorepunten

Vraag	Aantal uitwerkingen met verschillen in beoordeling van meer dan 2 scorepunten	Onzorgvuldigheid in beoordeling	Opzet alternatieve correctievoorschrift
1	1	-	1
2	2	-	2
3	1	1	-
4	-	-	-
5	2	1	1
6	4	1	3
7	-	-	-
8	4	1	3
9	5	1	4
10	-	-	-
11	-	-	-
12	-	-	-
13	2	1	1
14	2	1	1
totaal	23	7	16

Kleine verschillen

Hierboven is gekeken naar grote verschillen en waar die vandaan komen. Naast grote verschillen is het ook interessant om te kijken naar kleine verschillen en vooral naar waar veel kleine verschillen voorkomen. Meer concreet hebben we gekeken naar verschillen tussen het nieuwe cv en het reguliere cv van maximaal 2 scorepunten. In tabel 14 staat een overzicht van de aantallen leerlingen waarbij een verschil is van maximaal 2 scorepunten tussen beoordelaars, uitgesplitst per vraag. In de laatste kolom is een rijtotaal opgenomen. Hieraan is te zien dat de scores volgens het nieuwe cv iets hoger zijn (274 en 73) dan die volgens het reguliere cv (258 en 47).

Tabel 14: overzicht van aantallen leerlingen per vraag met een verschil tot en met 2 scorepunten tussen de beoordelaars van het nieuwe cv en regulier.

Score nieuw – regulier	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	rijtotaal
-2 of -1,5	-	2	1	2	2	1	4	1	3	1	2	3	15	10	47
-1 of -0,5	7	29	13	25	14	16	25	15	18	13	21	15	22	25	258
0	68	56	68	50	71	35	53	44	40	55	46	43	48	34	711
0,5 of 1	20	8	12	20	7	29	13	30	23	29	27	28	6	22	274
1,5 of 2	3	2	4	2	3	14	4	5	10	1	3	10	6	6	73

Om grip te krijgen op waar deze verschillen vandaan komen, zijn per vraag meerdere uitwerkingen bekeken. Gezien de aantallen, was een bestudering van alle relevante uitwerkingen geen optie. De analyse hieronder moet dus met enige voorzichtigheid geïnterpreteerd worden.

- Vraag 1
Verschillen lijken te zitten in onhandig opgeschreven uitwerkingen waarvoor in het reguliere cv een punt wordt afgetrokken, maar in nieuw cv niet.
- Vraag 2
Hier spelen, zoals eerder opgemerkt, twee aspecten. In het nieuwe cv worden twee scorepunten gegeven voor het oplossen van de vergelijking en in het reguliere cv zijn dat er drie. In het nieuwe cv moet expliciet worden vermeld welke x-waarde bij punt P hoort en welke bij Q. Het gewicht van verschillende onderdelen in de uitwerking is dus echt anders in beide cv's.
- Vraag 3, 4, 5
Bij deze vragen zijn er weinig verschillen groter dan 1 scorepunt.
- Vraag 6
Hier zijn veel kleine verschillen, met een hogere score volgens het nieuwe cv. De uitwerking is een lange procedure (eerst vergelijkingen twee cirkels opstellen, stelsel oplossen, snijpunten bepalen) waarbij in elke stap foutjes kunnen sluipen. Gevonden

verschillen lijken hieruit voort te komen. In nieuwe cv leiden die verschillende foutjes tot één punt aftrek, namelijk het laatste scorepunt.

- Vraag 7
Verschillen lijken voort te komen uit een rekenstap die in het reguliere cv beloond wordt, namelijk a en b invullen in de gegeven formule. In het nieuwe cv wordt deze stap niet beloond.
- Vraag 8
Hier zijn veel kleine verschillen, met een hogere score volgens het nieuwe cv. Net als bij vraag 6 gaat het hier om veel rekenstappen en notaties waar iets mis mee kan gaan (bijvoorbeeld absoluutstrepen, wortels). Dit type fouten levert in het reguliere cv minder punten op dan in het nieuwe cv.
- Vraag 9
Wederom veel kleine verschillen, met een hogere score volgens het nieuwe cv. Waar zit dat in? Gaat veel mis bij M en QM, ook veel stappen, waar in elke stap iets mis kan gaan. Hier komt de vraag naar voren hoe in het nieuwe cv omgegaan kan worden met het oplossen van een vergelijking met de GR. Is dat een apart scorepunt waard of is dit geschikt om onder completeren te laten vallen?
- Vraag 10
Wederom veel kleine verschillen, met een hogere score volgens het nieuwe cv. Een mogelijke verklaring is dat in het nieuwe cv het al genoeg was dat leerling aangaf door a te delen; volgens het reguliere cv moest die stap ook uitgewerkt worden voordat het scorepunt kan worden toegekend.
- Vraag 11
Bij deze vraag zijn er weinig verschillen groter dan 1 scorepunt.
- Vraag 12
Wederom veel kleine verschillen, met een hogere score volgens het nieuwe cv. De opbouw van het nieuwe cv is anders. In het nieuwe cv levert de afgeleide gelijk stellen aan nul een scorepunt op. Bij het reguliere cv moet ook meteen de oplossing worden gegeven.
- Vraag 13
Bij deze vraag zijn veel kleine verschillen in nadeel nieuw cv. Waar zit dat in? De aanpak en beloning nieuw cv komt niet overeen met 1^e aanpak reguliere cv. In het reguliere cv wordt het vinden van de x-coördinaten van B en C met 3 scorepunten beloond. In het nieuwe cv wordt dit beloon met 1 scorepunt.

- Vraag 14
Hier zijn geen grote verschillen, in voor- en nadeel ongeveer evenveel.

Samengevat

Kijkend naar de kleine verschillen zien we de volgende verklarende factoren voor verschillen in toegekende scorepunten volgens het reguliere en het nieuwe cv:

- een juiste aanpak, maar slordige of onjuiste uitvoering;
- andere opzet van het nieuwe cv ten opzichte van het reguliere cv, met een accentverschuiving ten aanzien van bepaalde onderdelen in de uitwerking.

Verschillen in verdeling scorepunten

In de analyse van de verschillen werd duidelijk dat de deze bij enkele opgaven verklaard kon worden door een andere weging van onderdelen in het correctievoorschrift. Bij de opgaven 1, 7, 10 en 11 lijkt het alternatieve cv sterk op het reguliere cv. De stappen zijn min of meer gelijk, in het reguliere cv staat het rekenwerk uitgeschreven; in het alternatieve cv staat dat beschreven. In de opgaven 2, 4, 5, 6, 12, 13 en 14 is de onderverdeling van scorepunten verschillend. Een voorbeeld hiervan is vraag 12 waarin leerlingen wordt gevraagd te bewijzen dat de toppen van de grafieken van $f_p(x) = \frac{x^3+4p}{x^2}$ (met $p > 0$) op één lijn liggen. Onderdeel in de uitwerking is de afgeleide $f'_p(x)$ gelijk stellen aan 0 om zo een vergelijking te krijgen waarin p uit te drukken is in x . In het reguliere cv is een van de bolletjes

- $f'_p(x) = 0$ geeft voor de x -coördinaat van de top $p = \frac{1}{8}x^3$ 1

Het inzicht dat de afgeleide gelijk moet worden gesteld aan 0 levert hier dus geen punten op. In het nieuwe cv is dat wel het geval, daar levert dat inzicht een punt op omdat dit een cruciaal inzicht is om tot een oplossing te komen.

Een ander voorbeeld is vraag 13. Hierin is de functie $f(x) = |\ln(x)|$ gegeven en een horizontale lijn $y = q$ met $q > 0$ die de grafiek van f in twee punten B en C snijdt en de y -as snijdt in punt A . De vraag is voor welke waarde van q geldt dat de lengte van lijnstuk BC drie keer zo groot is als de lengte van lijnstuk AB .

In het reguliere cv zijn drie scorepunten te verdienen met het vinden van de x -coördinaten van de punten B en C . Dat is de helft van het totaal aantal scorepunten van deze vraag. In het nieuwe cv ligt het accent anders. Daar is één scorepunt te verdienen met het vinden van deze coördinaten. Andere punten gaan naar het inzicht dat de vergelijking $f(x_B) = f(x_C)$ moet worden opgelost, het inzicht hoe de functiewaarden van x_B en x_C zonder absolute waardestrepes kunnen worden geschreven, het inzicht hoe de vergelijking zonder logaritmen geschreven kan worden, het inzicht hoe de vergelijking zonder logaritmen exact kan worden opgelost en als laatste het completeren en het juiste antwoord. De accenten van de uitwerking zijn anders in het nieuwe cv.

Bij de overige drie opgaven, vraag 3, 8 en 9 lijken de correctievoorschriften sterk op elkaar, maar zijn ze op een enkel punt toch weer verschillend.

Conclusies en aanbevelingen

Dit onderzoek richt zich op het verkennen van een alternatieve opzet van het correctievoorschrift. Zoals in de inleiding opgemerkt, is de belangrijkste reden hiervoor meer recht willen doen aan de essentie van de wiskundige vaardigheid van leerlingen. Een andere reden is de behoefte om een nieuwe balans te vinden tussen duidelijkheid voor docenten en een gedetailleerd correctievoorschrift. Centraal in dit onderzoek stond de vraag: welke gevolgen heeft het alternatieve correctievoorschrift voor de scores van leerlingen? Hierbij zijn de volgende deelvragen gesteld.

1. Welke correlaties zijn er tussen de scores volgens het reguliere correctievoorschrift en het alternatieve correctievoorschrift?
2. In hoeverre verschillen totaalscores van leerlingen volgens beide correctievoorschriften?
3. Aan welke factoren zijn eventuele verschillen toe te schrijven?

Antwoorden op onderzoeksvragen

1. Welke correlaties zijn er tussen de scores volgens het reguliere correctievoorschrift en het alternatieve correctievoorschrift?

De geschreven uitwerking van leerlingen zijn drie keer beoordeeld: door de eigen docent volgens het reguliere correctievoorschrift en door twee codeurs volgens het alternatieve correctievoorschrift. Er zijn correlaties berekend tussen de reguliere score en die van de codeurs en ook tussen de codeurs onderling. De correlatie van het aantal toegekende scorepunten tussen de totaalscores van leerlingen volgens het reguliere cv en de gemiddelde score op het nieuwe cv is 0,966. Alle berekende correlaties zijn hoog, boven 0,92.

2. In hoeverre verschillen totaalscores van leerlingen volgens beide correctievoorschriften?

De 99 leerlingen van wie de uitwerkingen zijn bekeken hebben volgens het reguliere correctievoorschrift gezamenlijk 4317 scorepunten behaald en volgens het alternatieve correctievoorschrift 4411. Dat is een verschil van 94 punten, dus gemiddeld ongeveer één scorepunt meer volgens het alternatieve correctievoorschrift. Er waren 37 leerlingen met een lagere totaalscore volgens het nieuwe cv (85,5 scorepunten) en 58 leerlingen met een hogere totaalscore volgens het nieuwe cv (179,5 scorepunten).

3. Aan welke factoren zijn eventuele verschillen toe te schrijven?

Om deze vraag te kunnen beantwoorden is eerst gekeken naar grote verschillen (meer dan 2 scorepunten verschil). Van de 23 uitwerkingen waarin een groot verschil is

geconstateerd, bleek dat in 7 gevallen toe te schrijven aan onzorgvuldigheden in de beoordeling en in 16 gevallen te verklaren door de opzet van het nieuwe cv.

Als verklaring voor de vele kleine verschillen zien we twee verklarende factoren, namelijk 1. een juiste aanpak, maar slordige of onjuiste uitvoering en 2. een andere opzet van het nieuwe cv ten opzichte van het reguliere cv, met een accentverschuiving ten aanzien van bepaalde onderdelen in de uitwerking.

De correctievoorschriften zijn, door de andere manier van kijken naar de uitwerking, in de helft van de gevallen anders van opzet, in die zin dat er een ander onderscheid wordt gemaakt in herkenbare stappen in de uitwerking. Het maakt uit of naar een uitwerking wordt gekeken vanuit rekenstappen of vanuit benodigde inzichten.

De centrale vraag in dit onderzoek is welke gevolgen het alternatieve correctievoorschrift heeft voor de scores van leerlingen. De gevolgen voor het aantal behaalde scorepunten zijn gering. Er zijn, zoals verwacht, hoge correlaties tussen leerlingsscores volgens beide correctievoorschriften. Leerlingen scoren iets hoger volgens het alternatieve cv.

Het belangrijkste verschil is dat het alternatieve cv andere accenten legt. Leerlingen die wel het juiste idee hebben voor een aanpak maar fouten maken in hun uitwerking krijgen met het alternatieve cv punten toegekend waar dat in het reguliere cv niet (of minder) het geval is. Daarnaast zien we in het alternatieve cv een andere verdeling van scorepunten over de uitwerking. Reden hiervoor is dat niet de hoeveelheid rekenwerk als uitgangspunt wordt genomen maar cruciale denkstappen.

Discussie

De verkenning van een alternatieve opzet van het correctievoorschrift heeft, zoals in de inleiding betoogd, verschillende redenen. Als eerste reden noemen we meer afstemming met andere exacte vakken als natuurkunde en scheikunde. De opzet van het alternatieve correctievoorschrift, met eerst een uitwerking van de vraag en daarna een verdeling van scorepunten over essentiële stappen hierin, sluit aan bij wat bij natuurkunde en scheikunde gebruikelijk is. In onze ogen is dit winst.

Een tweede reden is de wens om nog meer recht willen doen aan de essentie van de wiskundige vaardigheid van leerlingen. We beseffen dat dit een heikel punt is waar de meningen flink over kunnen verschillen. Want wat is precies die essentie en hoe bepaal je dat dan? In onze ogen heeft die essentie te maken met wiskundige denkactiviteiten. De alternatieve opzet van het cv lijkt met name in vragen die wiskundig denkactief zijn beter te passen bij de aard van de vraag.

De focus op relevante denkstappen in de uitwerking zou kunnen bijdragen aan het voorkomen van een *punteninflatie*. Hiermee bedoelen we het niet toekennen van scorepunten voor onderdelen van een uitwerking omdat het om een kleine rekenstap gaat. Een voorbeeld hiervan is het al of niet geven van een scorepunt voor het expliciet noemen dat bij optimaliseren de afgeleide 0 moet zijn.

Het alternatieve cv brengt meer dan het regulier cv in beeld waar de vraag in de kern over gaat, vinden we.

Een derde reden om het correctievoorschrift te willen herzien is de behoefte om een nieuwe balans te vinden tussen duidelijkheid voor docenten en een gedetailleerd correctievoorschrift. Dit onderzoek geeft geen antwoord op de vraag in hoeverre dit is gelukt. Tijdens het coderen met het alternatieve correctievoorschrift werd duidelijk dat hierin nog uitzoekwerk ligt. Zo is het verschil tussen *inzicht dat* en *inzicht hoe* nog niet duidelijk genoeg. De intentie was om het correct oplossen onder *inzicht hoe* te laten vallen. Maar hoe ga je dan om met kleine verschrijvingen? Waar vallen die onder? Vraagt dat om een extra 'spelregel', bijvoorbeeld een vakspecifieke regel?

Cito zal de bevindingen in dit onderzoek met het CvTE bespreken, waarbij gekeken zal worden hoe deze hun weerslag kunnen krijgen in de centrale examens wiskunde en/of nader onderzoek nodig is.

Literatuur

- Van Stiphout, I., Stolwijk, R. & Smeets, P. (2018). *Onderzoek afstemming examens en correctievoorschriften van exacte vakken vmbo-t, havo en vwo. Onderzoeksagenda CTE 2017*. Arnhem: Cito.
- Van Stiphout, I., Stolwijk, R., Smeets, P. Limburg, E. & Galema, A. (2019). *Onderzoek afstemming examens en correctievoorschriften van exacte vakken vmbo-t, havo en vwo. Onderzoeksagenda CTE 2018*. Arnhem: Cito.
- Van Stiphout, I., Stolwijk, R., Limburg, E. & Kruijver, B. (2020). *Onderzoek afstemming correctievoorschriften van exacte vakken vmbo, havo en vwo. Onderzoeksagenda CTE 2019*. Arnhem: Cito.

Bijlage A: Alternatief correctievoorschrift

Alternatief Correctievoorschrift VWO 2021

tijdvak 1

Wiskunde B

Dit correctievoorschrift is tot stand gekomen in samenwerking met de vaststellingscommissie van wiskunde B van het College voor Toetsen en Examen.

Parabool en twee lijnen

1 maximumscore 8

voorbeeld van een antwoord:

$$f'(x) = 1 - 2x \quad \text{dus} \quad rc_l = f'(0) = 1$$

$$rc_l \cdot rc_m = -1 \quad \text{dus} \quad rc_m = -1$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) \text{ invullen geeft een vergelijking voor } m: y = -x + \frac{3}{4}$$

$$\text{Uit } -x + \frac{3}{4} = x - x^2 \text{ volgt } x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

$$\text{De exacte oplossing is } x = 1 \frac{1}{2} \quad (x = \frac{1}{2} \text{ geeft } T)$$

$$\text{De oppervlakte van } V \text{ is gelijk aan } \int_{\frac{1}{2}}^{1 \frac{1}{2}} \left((x - x^2) - \left(-x + \frac{3}{4}\right) \right) dx$$

$$\text{Een primitieve van } -x^2 + 2x - \frac{3}{4} \text{ is } -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x$$

$$\text{Invullen van de grenzen geeft: de oppervlakte van } V \text{ is } \frac{1}{6}$$

- het inzicht dat de richtingscoëfficiënt van m berekend kan worden met behulp van de richtingscoëfficiënt van l 1
- het inzicht hoe de richtingscoëfficiënt van l berekend kan worden 1
- het inzicht hoe een vergelijking van m kan worden opgesteld 1
- het inzicht dat de snijpunten van lijn m met de parabool moeten worden berekend 1
- het inzicht hoe de x -coördinaat van dat snijpunt moet worden berekend 1
- het inzicht dat de integraal $\int_{\frac{1}{2}}^{1 \frac{1}{2}} \left((x - x^2) - \left(-x + \frac{3}{4}\right) \right) dx$ moet worden berekend 1
- het inzicht hoe een passende primitieve gevonden kan worden 1
- completeren en het juiste antwoord 1

Goniometrische functies

2 maximumscore 4

voorbeeld van een antwoord:

Uit $f(x) = g(x)$ volgt $\sin(x) = \sin(2x)$

Hieruit volgt $x = k \cdot 2\pi$ of $x = \frac{1}{3}\pi + k \cdot \frac{2}{3}\pi$

De oplossingen zijn $x = 0$, $x = \frac{1}{3}\pi$, $x = \pi$, $x = \frac{5}{3}\pi$ en $x = 2\pi$

De x -coördinaten van P en Q zijn $\frac{1}{3}\pi$ en $\frac{5}{3}\pi$

- het herleiden tot een vergelijking van de vorm $\sin(\alpha) = \sin(\beta)$ 1
- het inzicht hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- het inzicht dat moet worden gecontroleerd welke oplossingen bij P en Q horen 1
- completeren en het juiste antwoord 1

3 maximumscore 5

voorbeeld van een antwoord:

$$h(x) = \sin(2x) + 1$$

de oppervlakte van V is $\int_{1,33}^{2,97} (f(x) - h(x)) dx$

een primitieve van $f(x) - h(x)$ is $-2 \cos(x) + \cos(2x) - x$

$$[-2 \cos(x) + \cos(2x) - x]_{1,33}^{2,97} = 2,6$$

- het inzicht dat de integraal $\int_{1,33}^{2,97} (f(x) - h(x)) dx$ moet worden berekend 1
- het inzicht hoe het functievoorschrift van h gevonden kan worden 1
- het inzicht hoe de primitieve van $\sin(2x)$ kan worden berekend 1
- het inzicht hoe de primitieve van $f - h$ kan worden berekend 1
- completeren en het juiste antwoord 1

4 maximumscore 4

voorbeeld van een antwoord:

$$f\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ en } k\left(\frac{1}{3}\pi\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3} \text{ (en zijn dus gelijk)}$$

$$f'(x) = 2\cos(x) - 2\cos(2x) \text{ en } k'(x) = \frac{1}{2\cos^2(x)}$$

$$f'\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \text{ en } k'\left(\frac{1}{3}\pi\right) = 2 \text{ (en zijn dus gelijk)}$$

(dus de grafiek van k raakt de grafiek van f in een punt met x -coördinaat $\frac{1}{3}\pi$)

- het inzicht dat voor $x = \frac{1}{3}\pi$ moet gelden dat $f(x) = k(x)$ én $f'(x) = k'(x)$ 1
- het inzicht hoe de afgeleide van f kan worden berekend 1
- het inzicht hoe de afgeleide van k kan worden berekend 1
- completeren en de conclusie 1

Aardbevingen

5 maximumscore 4

voorbeeld van een antwoord:

$$6 = \frac{d}{t} \text{ (met } t \text{ de tijd waarop de eerste primaire golf bij het meetstation aankomt)}$$

$$3,5 = \frac{d}{t+17} \text{ (voor de secundaire golf)}$$

uit $d = 6t$ en $d = 3,5(t+17)$ volgt $6t = 3,5(t+17)$ en $t = 23,8$

hieruit volgt $d = 142,8$

- het inzicht hoe voor de primaire golf tijd, snelheid en afstand in een formule kunnen worden gecombineerd 1
- het inzicht hoe het tijdsverschil van 17 seconden moet worden verwerkt 1
- het inzicht hoe het stelsel vergelijkingen voor de primaire en secundaire golf kan worden opgelost 1
- completeren en het juiste antwoord 1

6 maximumscore 6

voorbeeld van een antwoord:

voor de coördinaten van het epicentrum geldt: $x^2 + y^2 = 240^2$ en

$$(x-192)^2 + (y-128)^2 = 80^2$$

$$384x - 192^2 + 256y - 128^2 = 240^2 - 80^2$$

$$y = -1,5x + 408$$

invullen en herleiden geeft $3,25x^2 - 1224x + 108\,864 = 0$

de oplossingen zijn $x = 144$ en $x = 232,6\dots$

de coördinaten zijn $(144, 192)$ en $(233, 59)$

- het inzicht dat er twee cirkels moeten worden gebruikt 1
- het inzicht hoe vergelijkingen van cirkels met middelpunten S en T kunnen worden opgesteld 1
- het inzicht dat het stelsel kan worden herleid tot één vergelijking / het inzicht hoe uit het stelsel één van de variabelen kan worden geëlimineerd 1
- het inzicht dat hieruit een kwadratische vergelijking kan worden herleid met één variabele 1
- het inzicht hoe deze kwadratische vergelijking kan worden opgelost 1
- completeren en het juiste antwoord 1

of

voorbeeld van een antwoord:

voor de coördinaten van het epicentrum geldt: $ST = \sqrt{192^2 + 128^2} = 230,75\dots$

$\tan(\alpha) = \frac{128}{192}$ geeft $\alpha = 33,69\dots$ met α de hoek tussen de x -as en ST

cosinusregel geeft dus $\angle EST = 19,44\dots$

de hellingshoek van SE is dus $33,69\dots + 19,44\dots = 53,13\dots$ of

$33,69\dots - 19,44\dots = 14,25\dots$

dit geeft $E(240 \cdot \cos(53,13\dots), 240 \cdot \sin(53,13\dots))$ en

$E(240 \cdot \cos(14,25\dots), 240 \cdot \sin(14,25\dots))$, dus $E(144, 192)$ en $E(233, 59)$

- het inzicht dat de cosinusregel in driehoek STE (met E het epicentrum) kan worden toegepast 1
- het inzicht hoe afstand ST kan worden berekend 1
- het inzicht hoe de hellingshoek van ST kan worden berekend 1
- het inzicht dat $\angle EST$ kan worden berekend 1
- het inzicht hoe de mogelijke hellingshoeken van SE berekend kunnen worden 1
- completeren en het juiste antwoord 1

7 maximumscore 6

voorbeeld van een antwoord:

er geldt: $4,5 = 10^{a-b \cdot 7,5}$ en $285,5 = 10^{a-b \cdot 6}$

het stelsel $\begin{cases} a - 7,5b = \log(4,5) \\ a - 6b = \log(285,5) \end{cases}$ moet worden opgelost

beide vergelijkingen aftrekken geeft $-1,5b = \log(4,5) - \log(285,5) = -1,802\dots$

dit geeft $b = 1,20\dots$ en $a = 9,66\dots$

$N = 10^{9,66\dots - 1,20\dots \cdot 6,5} = 71,5\dots$

$56 + 15 + 3,1 + 1,1 + 0,3 = 75,5$ dus de voorspelling wijkt 4 af

- het inzicht dat de punten $(7,5; 4,5)$ en $(6; 285,5)$ kunnen worden ingevuld in het gegeven model 1
- het inzicht dat een stelsel in a en b kan worden opgesteld door de logaritme te nemen van beide vergelijkingen 1
- het inzicht hoe dit stelsel kan worden opgelost 1
- het bepalen van bijbehorende waarden van a en b 1
- het inzicht hoe het aantal aardbevingen met een magnitude van 6,5 of groter kan worden voorspeld 1
- completeren en het juiste antwoord 1

Opmerking: als één van de waarden van a en b onjuist is berekend, voor deze vraag maximaal 5 scorepunten toekennen.

Een vierkant en vier vectoren

8 maximumscore 6

voorbeeld van een antwoord:

$$\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CP}) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{p+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{p^2+1}} \text{ en}$$

$$\cos(\angle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ}) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2}+1}}$$

$$\frac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2}+1}} \cdot \frac{p}{p} = \frac{1+p}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{p^2}+1} \cdot \sqrt{p^2}} = \frac{p+1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{p^2+1}}$$

Dus $\cos(\angle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CP}) = \cos(\angle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CQ})$ en dus zijn beide hoeken gelijk

het inzicht hoe de vectoren \overrightarrow{CP} , \overrightarrow{CA} en \overrightarrow{CQ} gevonden kunnen worden 1

het inzicht dat de formule $\cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ kan worden gebruikt 1

het inzicht hoe het inproduct moet worden uitgewerkt 1

het inzicht hoe de lengtes van de vectoren \overrightarrow{CP} en \overrightarrow{CQ} bepaald moet worden 1

een herleiding waaruit volgt dat beide uitdrukkingen gelijk zijn 1

completeren en de conclusie dat beide hoeken gelijk zijn 1

of

voorbeeld van een antwoord:

Punt S is het snijpunt van lijnstuk AB en CQ .

Driehoek OQC en driehoek BCS zijn gelijkvormig met vergrotingsfactor p .

De lengte van lijnstuk BS is p .

Driehoek OPC en driehoek BCS zijn congruent.

Omdat diagonaal CA het vierkant verdeelt in twee congruente driehoeken, zijn driehoek PCA en driehoek SCA ook congruent.

De hoeken tussen de vectoren zijn dus gelijk.

het inzicht dat het snijpunt S van lijnstuk AB en CQ gebruikt moet worden	1
het inzicht dat op basis van gelijke hoeken gelijkvormigheid gebruikt moet worden	1
het inzicht dat driehoek OQC en driehoek BCS gelijkvormig zijn	1
het inzicht dat driehoek OPC en driehoek BCS congruent zijn	1
het inzicht dat driehoek PCA en driehoek SCA congruent zijn	1
completeren en de conclusie dat beide hoeken gelijk zijn	1

9 maximumscore 7

voorbeeld van een antwoord:

$$\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix} \text{ en } M\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \text{ dus } \overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{PB} \perp \overrightarrow{QM} \text{ als geldt } \overrightarrow{PB} \cdot \overrightarrow{QM} = 0, \text{ dit geeft } (1-p)\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{2} = 0$$

Deze vergelijking kan worden opgelost met de grafische rekenmachine, $p = 0,54$

het inzicht hoe vector \overrightarrow{PB} (of de rc van de lijn door P en B) gevonden kan worden	1
het inzicht hoe de coördinaten van punt M gevonden kunnen worden	1
het inzicht hoe vector \overrightarrow{QM} (of de rc van de lijn door Q en M) gevonden kan worden	1
het inzicht dat twee vectoren loodrecht op elkaar staan als hun inwendig product gelijk is aan nul (of: als het product van de rc's gelijk is aan -1)	1
het inzicht hoe hieruit een vergelijking in p gevonden kan worden	1
het inzicht hoe deze vergelijking met de grafische rekenmachine opgelost kan worden	1
completeren en het juiste antwoord	1

Limiet van een verhouding

10 maximumscore 4

voorbeeld van een antwoord:

$$t^2 = a \text{ geeft } t = -\sqrt{a} \text{ of } t = \sqrt{a}$$

$$\text{Dus } y_S = y(-\sqrt{a}) = a + 2\sqrt{a} \text{ en } y_R = y(\sqrt{a}) = a - 2\sqrt{a}$$

$$\frac{QR}{QS} = \frac{a - 2\sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a}} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{a}}} \text{ en } \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{a}}} = 1$$

het inzicht hoe de bij R en S horende waarden van t moeten worden berekend	1
het inzicht hoe QR en QS kunnen worden uitgedrukt in a	1
het inzicht dat in de breuk $\frac{QR}{QS}$ elke (deel)term door a gedeeld moet worden	1
completeren en het juiste antwoord	1

Gebroken functie met een parameter

11 maximumscore 3

voorbeeld van een antwoord:

$$f_1(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2} = x + \frac{4}{x^2}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^2} = 0$, dus de scheve asymptoot van f_1 heeft vergelijking $y = x$

voor alle x geldt: $\frac{4}{x^2} > 0$, dus de grafiek ligt in zijn geheel boven de S.A.

het inzicht hoe het functievoorschrift van f_1 kan worden herschreven	1
het inzicht hoe de vergelijking van de scheve asymptoot kan worden bepaald	1
een redenering die aangeeft waarom hieruit volgt dat alle functiewaarden boven de asymptoot liggen	1

12 maximumscore 5

voorbeeld van een antwoord:

$$f_p'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(x^3 + 4p)}{x^4} \quad (= \frac{x^3 - 8p}{x^3})$$

$$f_p'(x) = 0 \text{ als } x^3 = 8p \text{ dus } p = \frac{1}{8}x^3$$

de kromme waarop de toppen liggen heeft vergelijking $y = \frac{x^3 + 4 \cdot \frac{1}{8}x^3}{x^2}$

herleiden tot $y = 1\frac{1}{2}x$ (dus de toppen liggen op een rechte lijn)

het inzicht hoe de afgeleide van f_p kan worden gevonden	1
het inzicht dat de afgeleide van f_p gelijk moet worden gesteld aan nul	1
het inzicht dat vervolgens p kan worden uitgedrukt in x	1
het inzicht dat vervolgens y kan worden uitgedrukt in x	1
completeren en de conclusie	1

Absolute natuurlijke algoritme

13 maximumscore 6

voorbeeld van een antwoord:

Uit $BC = 3 \cdot AB$ volgt $f(b) = f(4b)$ met b de x -coördinaat van punt B .

$f(b) = |\ln(b)| = -\ln(b)$ (want punt B ligt links van het nulpunt van de grafiek van f)

$f(4b) = |\ln(4b)| = \ln(4b)$ (want punt C ligt rechts van het nulpunt van de grafiek van f)

Uit $-\ln(b) = \ln(4b)$ volgt $\frac{1}{b} = 4b$

Dit geeft $b = \frac{1}{2}$ ($b = -\frac{1}{2}$ voldoet niet)

Hieruit volgt $q = \ln(2)$ (of een gelijkwaardige uitdrukking)

het inzicht dat $x_C = 4 \cdot x_B$	1
het inzicht dat de vergelijking $f(x_B) = f(x_C)$ moet worden opgelost	1
het inzicht hoe de functiewaarden van x_B en x_C zonder absolute waarde strepen kunnen worden geschreven	1
het inzicht hoe de vergelijking zonder logaritmen kan worden geschreven	1
het inzicht hoe deze vergelijking zonder logaritmen exact kan worden opgelost	1
completeren en het juiste antwoord	1

P en P'

14 maximumscore 6

voorbeeld van een antwoord:

De lijn door O en P heeft hellingshoek ($180^\circ - 120^\circ =$) 60°

De richtingscoëfficiënt van deze lijn is dus $\sqrt{3}$

Punt P is het snijpunt van de lijn $y = \sqrt{3} \cdot x$ met de grafiek van f

Voor punt P geldt dus $\sqrt{3} \cdot x = 6\sqrt{x}$

Kwadrateren geeft $3x^2 = 36x$

Hieruit volgt $x = 12$ ($x = 0$ voldoet niet)

$$OP = \sqrt{12^2 + (12\sqrt{3})^2} = 24$$

Dus is de x -coördinaat van punt P' gelijk aan -24

het inzicht dat een vergelijking van de lijn door O en P moet worden bepaald	1
het inzicht hoe de hellingshoek (of de richtingscoëfficiënt) van de lijn door O en P kan worden berekend	1
het inzicht dat punt P het snijpunt is van deze lijn met de grafiek van f	1
het inzicht hoe de hieruit volgende vergelijking exact kan worden opgelost	1
het inzicht hoe de lengte van OP kan worden berekend	1
completeren en het juiste antwoord	1

of

voorbeeld van een antwoord:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \text{ en } \overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Voor de hoek tussen deze twee vectoren geldt $\cos(120^\circ) = \frac{\left| \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} p \\ 6\sqrt{p} \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}$

Dit geeft de vergelijking $-\frac{1}{2} = \frac{-p}{\sqrt{p^2 + 36p}}$

Kruislings vermenigvuldigen en kwadrateren geeft $p^2 + 36p = 4p^2$

Hieruit volgt $p = 12$ ($p = 0$ voldoet niet)

$OP = \sqrt{12^2 + 36 \cdot 12} = 24$ en dus is de x -coördinaat van punt P' gelijk aan -24

het inzicht dat de formule voor de hoek tussen twee vectoren kan worden gebruikt	1
het inzicht hoe de richtingsvectoren van OP en OP' kunnen worden opgesteld	1
het inzicht hoe hieruit een tweedegraads vergelijking volgt	1
het inzicht hoe de x -coördinaat van P exact kan worden berekend	1
het inzicht hoe de lengte van OP kan worden berekend	1
completeren en het juiste antwoord	1

© Copyright 2023

Dit is een uitgave van divisie
Centrale toetsen en examens,
Stichting Cito.

Alle rechten voorbehouden.
Niets uit dit werk mag zonder
voorafgaande schriftelijke
toestemming van Stichting Cito
worden openbaar gemaakt en/of
verveelvoudigd door middel van
druk, fotokopie, scanning,
computersoftware of andere
elektronische verveelvoudiging
of openbaarmaking, microfilm,
geluidskopie, film of videokopie
of op welke wijze dan ook.

Colofon

Redactie: Irene van Stiphout en Ruud Stolwijk
Fotografie: Ron Steemers

Cito.nl



CITO CTE