

Balans over de strategieën en procedures bij het hoofdrekenen halverwege de basisschool

PPON-reeks nummer 40



zeker weten

Balans over de strategieën en procedures bij het hoofdrekenen halverwege de basisschool

Uitkomsten van de peiling in 2005

Jean-Marie Kraemer

Rekenen – Wiskunde

PPON-reeks nummer 40

Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau

Uitgave Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling 2009

- Opdrachtgever: Ministerie van Onderwijs, Cultuur en Wetenschappen
- Productgroepmanager PPON: Frank van der Schoot
- Ontwerp peiling: Jean-Marie Kraemer
- Opgaven- en toetsconstructie: Jean-Marie Kraemer
- Auteur: Jean-Marie Kraemer
- Psychometrische analyses: Norman Verhelst
- Redactie: Fons Moelands
- Bureau redactie: Sibylle Cosyn, Loes Hiddink
- Grafische vormgeving: Marianne Brouwer
- Dtp-opmaak: Service Unit, MMS, Ron Egbers
- Foto omslag: Ron Steemers

Artikelnummer 59942

© Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling Arnhem (2009)

Alle rechten voorbehouden. Niets uit dit werk mag zonder voorafgaande schriftelijke toestemming van Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling worden openbaar gemaakt en/of verveelvoudigd door middel van druk, fotokopie, scanning, computersoftware of andere elektronische verveelvoudiging of openbaarmaking, microfilm, geluidskopie, film- of videokopie of op welke wijze dan ook.

Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling Arnhem heeft getracht alle rechthebbenden te achterhalen. Indien iemand meent als rechthebbende in aanmerking te komen, kan hij of zij zich tot Cito wenden.

Samenvatting

Begin 2003 is het vierde peilingsonderzoek voor rekenen-wiskunde medio basisonderwijs uitgevoerd. Naast de toetsen, heeft een steekproef van leerlingen met lage, gemiddelde en hoge rekenvaardigheid een serie opgaven hardop opgelost om oplossingswijzen te verzamelen die zichtbaar maken hoe leerlingen halverwege de basisschool hoofdrekenen. Het jaar daarop heeft een andere, vergelijkbare steekproef leerlingen uit jaargroep 5 dezelfde reeks opgaven opgelost, aangevuld met drie ankeropgaven, om meer informatie te krijgen over de invloed van het vaardigheidsniveau op de manier van hoofdrekenen.

De geregistreeerde oplossingswijzen laten zien welk repertoire aan strategieën en procedures leerlingen hebben ontwikkeld, hoe ze rekenprocedures flexibel gebruiken en formaliseren, wat hun prestatieniveau is en welke fouten ze maken bij hardop hoofdrekenen met pen en papier.

De belangrijkste resultaten en conclusies van de uitgevoerde deelstudies zijn hier bij elkaar gezet.

Over de algemene trend

Rijgen: de meest gebruikte en meest effectieve hoofdrekenmethode

Meer hoofdrekenen, minder cijferen. Zo luidt de titel van het openingsartikel van Sjoerd Huitema in het septembernummer van Willem Bartjens anno 1991, kort nadat flexibel hoofdrekenen in het kerndoel basisvaardigheden is opgenomen. Het advies heeft gehoor gekregen. Vijftien jaar na dato rekenen leerlingen uit jaargroep 5 vrijwel altijd met het hoofd, het vaakst rijgend. Het splitsen dat het meest op cijferen lijkt, wordt in hooguit 20% van de oplossingen gebruikt, terwijl het cijferalgoritme in slechts 7 van de 2152 geobserveerde berekeningen is toegepast. In één op de tien oplossingen leidt de leerling af. Alles wijst erop dat rijgen loont en dat splitsen en afleiden onvoldoende worden beheerst, afleiden het minst.

hoofdstuk 3 | pagina 44

Flexibel rekenen op basis van rijgen, splitsen en redeneren vooralsnog niet effectief

Veel leerlingen wisselen van rekenmethode bij het oplossen van de zeven (of negen) optel- en aftrekopgaven van hun opgavenset. Sommigen combineren rijgen met splitsen, anderen wisselen rijgen met splitsen én afleiden of geheugenfeiten af. En er zijn leerlingen die alle vier de rekenmethoden gebruiken. Alles wijst erop dat flexibel hoofdrekenen op basis van rijgen, splitsen en afleiden voorlopig niet loont, omdat te veel leerlingen het splitsen en afleiden onvoldoende beheersen.

hoofdstuk 4 | pagina 51

Meer rijgers in de top van de populatie

Sommige leerlingen uit jaargroep 5 rijgen altijd, welke opgave ze ook oplossen. De vergelijking van het aantal keer dat de leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog rijgen bij het uitrekenen van ankeropgaven geeft een impressie van de samenhang tussen het gebruik van rijgen en het vaardigheidsniveau. Er zijn meer 'rijgers' in de hoogste vaardigheidsgroep gevonden dan in de twee overige groepen.

hoofdstuk 5 | pagina 65

Mengvorm splitsen – rijgen vaak gebruikt bij kaal rekenen

In de schriftelijke toets rekt het gros van de leerlingen uit jaargroep 5 de opgave $35 + 19$ foutloos uit (85% goed) terwijl één op de twee leerlingen $62 - 48$ verkeerd uitrekt. 623 geobserveerde oplossingen van twee optellingen en drie aftrekkingen geven een impressie van hoe deze leerlingen 'kaal' optellen en aftrekken. Vier observaties vallen op. (1) Er wordt veel gesplitst, veel meer dan in het totale bestand oplossingswijzen. (2) Een op de twee leerlingen die $35 + 19$, $306 + 698$ en $62 - 48$ splitsend uitrekt, gebruikt de mengvorm splitsen-rijgen. Het loont alleen bij optellen. (3) Zeer weinig leerlingen die rijgend rekenen vullen aan in plaats van af te trekken. Ze vinden wel allemaal op deze manier de juiste uitkomst. (4) Er wordt opvallend weinig gebruikgemaakt van de elementaire vormen van afleiden die tot het varierekenen behoren.

hoofdstuk 6 | pagina 70

Over rijgend aftrekken

Flexibel rijgen: de elementaire vorm van flexibel hoofdrekenen

1231 geobserveerde rijgoplossingen laten zien dat leerlingen uit de groep Laag, Midden en Hoog een eigen stijl van flexibel aftrekken hebben ontwikkeld, die gebaseerd is op het gebruik van maximaal negen vaste rekenschema's. Deze schema's ontstaan uit de koppeling van drie alternatieve aftrekstrategieën met drie typen rijgprocedures: (1) *aftrekken*, (2) *optellen tot* en (3) *aftrekken tot* in combinatie met (A) *rekenen via een tienvoud*, (B) *rekenen met tienvouden* en (C) *eerst de eenheden bewerken*. Vier aanwijzingen zijn gevonden. (1) Als de leerling een aftrek-opgave aftrekkend uitrekent, rijgt hij vrijwel altijd met de 10-sprong of tienvouden (c.q. 100-sprong of honderdvouden). (2) Leerlingen uit de groepen Laag en Midden gebruiken ook vaker deze procedure dan rijgen via een tienvoud, als ze een aftrekopgave overbruggend uitrekenen. (3) Leerlingen uit de groep Hoog gebruiken aan de ene kant een breed scala aan rijgschema's. Ze lossen aan de andere kant opgaven vrij eenzijdig via tienvouden of honderdvouden op, als ze overbruggend aftrekken. (4) Deze leerlingen behalen structureel hoge scores, in tegenstelling tot de leerlingen uit de groep Laag die de rekenhandelingen van meer rijgschema's nog maar matig beheersen.

hoofdstuk 7 | pagina 82

Standaardisering van aftrekprocedures onder de honderd?

Treffende voorbeelden uit de stapel van 1231 geobserveerde oplossingen laten de weg zien die de Nederlandse basisschoolleerling volgt bij de formalisering van aftrekken tot 100. Eerst wordt 'alles tellend' getransformeerd in 'dubbel tellen' en vervolgens in 'rijgen met sprongen in de telrij' (jaargroep 3-4). 'Rijgen met sprongen' wordt daarna eerst in 'rijgen met tienvouden' omgezet en daarna volgens de negen ontwikkelde rijgschema's gestandaardiseerd en aangepast om getallen groter dan 100 te kunnen bewerken (jaargroep 5-6). Het geobserveerde verschil in het niveau van rijgen vraagt om maatwerk. De minst gevorderde leerlingen uit de groep Laag rijgen op het startniveau van jaargroep 4, terwijl de meest gevorderde leerlingen uit de groep Hoog niet onder doen voor de gemiddelde leerling van jaargroep 6.

hoofdstuk 8 | pagina 103

Minder rijgfouten met pen en papier

Een vijftal rijgfouten uit een bestand van ruim 200 oplossingen geeft een behoorlijk inzicht in de aard en de bron van de structurele fouten die leerlingen uit jaargroep 5 bij rijgend aftrekken maken. Leerlingen die nog steeds dubbel tellen moeten deze handeling zo snel mogelijk in rijgen met sprongen zien te veranderen. Leerlingen die met sprongen rijgen, verliezen vaak het overzicht of maken slordigheidsfouten vooral bij aanvullend optellen, omdat ze uit het hoofd rekenen en niets op papier zetten. In de groep meest vaardige leerlingen wordt bij aftrekken tot 1000 dezelfde typen rekenfouten gemaakt als bij aftrekken tot 100 in de groepen Laag en Midden. Auteurs van rekenboeken en leraren moeten de doelen van rijgend hoofdrekenen adequater differentiëren en ervoor zorgen dat deze groepen leerlingen de eerst haalbare sprong naar het eerstvolgende niveau van rijgen kunnen maken. Het leren noteren van de eigen rijghandeling in een functionele schriftelijke rekentaal is daar één van.

hoofdstuk 9 | pagina 131

Over splitsend en redenerend aftrekken

Het tekort aan eenheden spoort aan om splitsen de formaliseren

In één op de tien geobserveerde aftrekoplossingen rekent de leerling de uitkomst van het probleem of de kale aftrekking splitsend uit. Deze uitkomst is in de ene helft van de oplossingen goed en in de andere helft fout. Splitsen levert dan – gemiddeld genomen – 7% van alle correcte uitkomsten op en 16% van alle foutieve uitkomsten. Dit roept meer vragen op dan antwoorden. Deze splitsoplossingen en de gemaakte fouten wijzen hoe dan ook naar twee hoofdproblemen: leerlingen begrijpen de splitsprocedures die ze gebruiken niet goed en maken daarom veel fouten. Ze splitsen bovendien in contexten waar ze beter hadden kunnen rijgen.

hoofdstuk 10 | pagina 148

Afsplitsen en compenseren: het kernprobleem bij redenerend aftrekken

228 oplossingen tonen aan dat leerlingen halverwege de basisschool niet goed kunnen afleiden. Het percentage juiste uitkomsten ligt tussen 40% en 60%, afhankelijk van de strategie die de leerling volgt en de procedure die hij toepast. Bij de meest gebruikte vorm van afleiden – afsplitsen en compenseren – schort het aan twee kanten. Leerlingen vergissen zich bij compenseren. Ze leiden bovendien vaak af in situaties waar ze beter zouden kunnen rijgen (of splitsen). Een lastig probleem dus, als flexibel hoofdrekenen een kerndoel is voor iedereen.

hoofdstuk 11 | pagina 185

Over ‘restoplossingen’ bij aftrekken

De invloed van de taal in aftrekopgaven minder groot dan verondersteld

217 van de 1882 geobserveerde aftrekoplossingen – ruim 11% – is in de categorie ‘rest’ terechtgekomen. De gebruiksfrequentie van deze oplossingswijzen en het aantal gemaakte fouten geven belangrijke informatie over de factoren die bij aftrekken een rol spelen. Het succes (c.q. falen) wordt vooral bepaald door de mate waarin de leerlingen inzichtelijk rijgen, splitsen en geheugenfeiten gebruiken. De kenmerken van de opgaven bepalen voor een belangrijk deel of leerlingen een aftreksituatie correct interpreteren en schematiseren, in de loop van het oplossingsproces vastlopen of (impliciet) om hulp vragen. Het taalgebruik in de opgave is één van die kenmerken. In combinatie met de moeilijkheidsgraad van de opgavenset genereert het taalgebruik vooral in de groepen Laag en Hoog slechts een (zeer) klein deel van het totale aantal fouten dat de leerlingen maken. De taal in de opgaven speelt een rol, maar het verklaart bij lange na niet de structurele en meest voorkomende fouten die leerlingen bij aftrekken maken.

hoofdstuk 12 | pagina 219

Aan de slag!

Balans en verbeterpunten

Leraren en leerlingen realiseren maar gedeeltelijk het doel van flexibel hoofdrekenen. Veel leerlingen kunnen op een inzichtelijke manier flexibel rijgen. Een grote groep geobserveerde leerlingen strandt echter bij het gecombineerde gebruik van rijgen, splitsen en redeneren. Zij begrijpen splitsen en redeneren niet goed genoeg en/of gebruiken deze hoofdrekenmethoden in situaties waar rijgen meer voor de hand ligt. De huidige manier van leren hoofdrekenen werkt bovendien een zeer grote niveaudifferentiatie in de hand die het noodzakelijke maatwerk complex en moeilijk uitvoerbaar maakt. Zo luidt de balans van hoofdrekenen aan het begin van deze 21ste eeuw. Onderzoekers, auteurs van methoden, toetsontwikkelaars én leraren zijn nu aan zet. De geformuleerde verbeterpunten van dit afsluitende hoofdstuk zijn voor hen bedoeld.

hoofdstuk 13 | pagina 223

Inhoud

Samenvatting	4
Voorwoord	14
Over het onderzoek	15
1 Achtergrond en onderzoeksvragen	16
1.1 Aanleiding	16
1.2 Typering van het huidige hoofdrekenonderwijs	17
1.3 Onderzoeksvragen	26
2 Opzet van het onderzoek	29
2.1 Opgavensets	29
2.2 Onderzoeksdesign	33
2.3 Onderzoeksgroep	34
2.4 Afname	34
2.5 Investerings- en codering	35
Over de algemene trend	43
3 Rijen: de meest gebruikte en meest effectieve hoofdrekenmethode	44
3.1 Inhoud	44
3.2 Beïnvloedende factoren	44
3.3 Onderzoeksvragen	45
3.4 Analyse	46
3.5 Resultaten	46
3.6 Aandachtspunten	47
4 Flexibel rekenen op basis van rijen, splitsen en redeneren vooralsnog niet effectief	51
4.1 Inhoud	51
4.2 Beïnvloedende factoren	51
4.3 Onderzoeksvragen	56
4.4 Analyse	56
4.5 Resultaten	57
4.6 Aandachtspunten	60
5 Meer rijgers in de top van de populatie	65
5.1 Inhoud	65
5.2 Onderzoeksvraag	65
5.3 Analyse	65
5.4 Resultaten	66
5.5 Aandachtspunt	68

6	Mengvorm splitsen-rijgen vaak gebruikt bij kaal rekenen	70
6.1	Inhoud	70
6.2	Beïnvloedende factoren	70
6.3	Onderzoeksvragen	72
6.4	Analyse	72
6.5	Resultaten	72
6.6	Aandachtspunten	77
	Over rijgend aftrekken	81
7	Flexibel rijgen: de elementaire vorm van flexibel hoofdrekenen	82
7.1	Inhoud	82
7.2	Onderzochte strategieën en procedures	82
7.3	Aftrekstrategieën	83
7.4	Rijgprocedures in relatie met de aftrekstrategieën	96
7.5	Aandachtspunten	100
8	Standaardisering van aftrekprocedures tot 100	103
8.1	Inhoud	103
8.2	Formalisering	104
8.3	Actueel niveau van formalisering	122
8.4	Samenhang tussen vaardigheidsniveau en niveau van formalisering	125
8.5	Aandachtspunt	127
9	Minder rijgfouten met pen en papier	131
9.1	Inhoud	131
9.2	Onderzochte oplossingen	131
9.3	Onderzoeksvragen	132
9.4	Analyse	132
9.5	Resultaten	133
9.5.1	Groep Laag	133
9.5.2	Groep Midden	139
9.5.3	Groep Hoog	142
9.6	Aandachtspunten	145
	Over splitsend en redenerend aftrekken	147
10	Het tekort aan eenheden spoort aan om splitsen te formaliseren	148
10.1	Inhoud	148
10.2	Aftrekstrategie	148
10.3	Splitsprocedures	154
10.4	Formalisering	161
10.5	Foutenanalyse	176
10.6	Aandachtspunten	184

11	Afsplitsen en compenseren: het kernprobleem bij redenerend aftrekken	185
11.1	Inhoud	185
11.2	Aftrekstrategie	185
11.3	Vormen van redenerend aftrekken	189
11.4	Formalisering en niveaus van redeneren	192
11.5	Structurele fouten	203
11.6	Aandachtspunten	207
	Over ‘restoplossingen’ bij aftrekken	209
12	De invloed van taal in aftrekopgaven minder groot dan verondersteld	210
12.1	Inhoud	210
12.2	Onderzochte restoplossingen	210
12.3	Onderzoeksvragen	213
12.4	Analyse	213
12.5	Resultaten	214
12.6	Conclusie	219
	Aan de slag	223
13	Balans en verbeterpunten	224
13.1	Inhoud	224
13.2	Aanwijzingen	225
13.3	Sterkte-zwakte analyse van rijgend, splitsend en redenerend aftrekken	227
13.4	Balans van flexibel hoofdrekenen	229
13.5	Verbeterpunten	230
	Literatuur	240

Voorwoord

Voorwoord

Peilingsonderzoeken zoals die door PPON worden uitgevoerd, richten zich vooral op de beschrijving van vaardigheden van leerlingen op basis van de opgaven die aan hen zijn voorgelegd. Het onderzoek laat zien in hoeverre leerlingen deze opgaven al of niet beheersen in relatie tot hun vaardigheidsniveau. Maar er is natuurlijk meer te beschrijven. Zeker bij het oplossen van rekenvraagstukken kunnen en zullen leerlingen gebruikmaken van allerlei strategieën en procedures, meer en minder efficiënt, meer en minder succesvol, om tot een oplossing te komen. In hoeverre dergelijke strategieën en procedures toegepast worden, wordt uiteraard uit hun antwoorden niet duidelijk. Soms, wanneer leerlingen de opgaven ‘op papier’ kunnen uitrekenen, kunnen we uit de gemaakte aantekeningen wel opmaken hoe hun strategie is geweest of welke procedure ze daarbij hebben gebruikt. Maar wanneer het hoofdrekenopgaven betreft, opgaven die ‘uit het hoofd’ moeten uitgerekend worden, zullen we leerlingen moeten vragen om de opgave ‘hardop’ op te lossen om hun strategie te achterhalen.

Jean-Marie Kraemer heeft in 2005, in het kader van het vierde peilingsonderzoek voor rekenen-wiskunde medio jaargroep 5 en de ontwikkeling van nieuwe rekentoetsen voor het leerling-volgsysteem, het initiatief genomen om de strategieën en procedures in kaart te brengen die leerlingen bij het maken van hoofdrekenopgaven hanteren. Toetsleiders hebben daartoe aan leerlingen individueel enkele hoofdrekenopgaven voorgelegd en hen gevraagd deze hardop op te lossen. Zij noteerden de oplossingsstrategieën op observatieformulieren terwijl deze sessies ook op audiocassettes werden opgenomen. Dat dit een rijkdom aan gegevens kan opleveren, bewijst deze publicatie.

Naar analogie van een eerdere balans over taalkwaliteit (Van de Gein, 2004) zouden we deze balans een balans over de kwaliteit van het hoofdrekenen kunnen noemen. Minutieus wordt hier verslag gedaan van de strategieën, de procedures, het succes maar vooral ook van de fouten die leerlingen maken, op basis van de verzamelde hardopdenkprotocollen. Het blijkt maar weer dat wij veel van hun fouten kunnen leren. Tegelijk worden de onderzoeksresultaten in verband gebracht met de theoretische ontwikkelingen binnen het reken-wiskundeonderwijs.

PPON is Jean-Marie Kraemer zeer erkentelijk voor de manier waarop hij voor ons de hoofdreken-kwaliteit van de leerlingen halverwege het basisonderwijs in beeld heeft gebracht. Tegelijk gaat daarbij onze erkentelijkheid uit naar Fons Moelands, die steeds bereid was de diverse concept-teksten van kritisch commentaar te voorzien, en naar Norman Verhelst voor de psychometrische analyses.

Deze balans bevat ook tal van ingewikkelde figuren en tabellen. Een speciaal woord van dank geldt daarom Loes Hiddink (bureau-redacteur) en de medewerkers van de afdeling drukwerk-voorbereiding van Cito die een belangrijke bijdrage hebben geleverd aan de totstandkoming van deze balans.

Frank van der Schoot
productgroepmanager PPON

Over het onderzoek

- 1 Achtergrond en onderzoeksvragen
- 2 Opzet van het onderzoek

1 Achtergrond en onderzoeksvragen

Voor het eerst zijn hoofdrekenoplossingen van leerlingen uit jaargroep 5 in het kader van een periodieke peiling van het onderwijsniveau systematisch verzameld en geanalyseerd. We beschrijven wat de aanleiding was om te onderzoeken hoe leerlingen hoofdrekenen. Ook laten we zien welke aspecten van hoofdrekenen onderzocht zijn en vanuit welke vragen de oplossingswijzen van de leerlingen zijn geïnventariseerd en geanalyseerd, rekening houdend met het onderwijsaanbod.

1.1 Aanleiding

Acht jaar geleden, werden op de Panama najaarsconferentie de resultaten van de derde peiling van het onderwijsniveau rekenen-wiskunde halverwege de basisschool gepresenteerd (Noteboom e.a., 2000). De verwachtingen over de resultaten van de leerlingen op het onderdeel *Getallen en bewerkingen* waren hooggespannen, omdat de inhoudelijke en didactische vernieuwing van dit programmaonderdeel inmiddels in alle schoolboeken was ingevoerd. Het experiment van Klein (1998) had aangetoond dat deze nieuwe aanpak van flexibel leren hoofdrekenen zelfs voor de minst vaardige leerlingen haalbaar en effectief was. Hoofdrekenen zou bij deze peiling dus meer dan ooit goed uit de verf moeten komen.

De opbrengsten bij het onderwerp *optellen tot honderd* vielen mee. Er was sprake van een lichte stijging ten opzichte van de resultaten van 1992. De gemiddelde leerling én de leerlingen op percentiële niveau 25 beheersten optellingen als $53 + 16$ en $27 + 13$, zowel in een kale presentatie als in eenvoudige contexten waarin optellen duidelijk herkenbaar was als een vorm van *toevoegen of samennemen*. Ze beheersten ook kale optellingen als $48 + 8$, maar kwamen in de problemen, als een dergelijke opgave in een *vergelijkingcontext* was geplaatst. Ze werden dus eerder door de contexten dan door de getallen belemmerd.

Het Tal-team (1999) had kort na de peiling voor het rekenen tot honderd als tussendoel geformuleerd:

Eind groep 4 zijn de leerlingen in staat optellingen en aftrekkingen tot honderd, zowel kaal als in toepassingen op te lossen. Ze maken daarbij gebruik van de getallenlijn, of noteren tussenstappen in sommentaal, of rekenen helemaal uit het hoofd (p. 58).

In vergelijking met dit tussendoel en met de resultaten van Klein vielen de peilingsresultaten voor *afrekken* tegen. In de peiling van 1992 presteerden de leerlingen iets beter op het onderwerp *afrekken* dan in de eerste peiling van 1987. Dit kleine positieve verschil was in 1997 weer verdwenen. Net als bij *optellen* waren sommige contexten een bron van problemen. In de voorgelegde contexten nam *afrekken* de vorm aan van *eraf halen*, *aanvullen en vergelijken / verschil bepalen*. Veel leerlingen beheersten de moeilijkste aftrekkingen nog niet (bijvoorbeeld $64 - 28$) en er ontstonden extra problemen als dergelijke getalcombinaties in een

context stonden. Het tussendoel voor *afrekken* werd in ieder geval nog onvoldoende beheerst (p. 59).

De constatering dat contexten rekenproblemen veroorzaakten was opmerkelijk.

Aftekproblemen uit het leven van alledag, dus in een context geplaatst, waren immers bewust in de leerlijnen van het rekenen tot honderd vervlochten om de leerlingen in staat te stellen elkaar aanvullende vormen van afrekken te ontwikkelen en te leren toepassen. De auteurs van de balans adviseerden dan ook om in de volgende peiling meer aandacht te schenken aan de invloed van contexten en de getallen op de rekenprestaties.

1.2 Typering van het huidige hoofdrekkenonderwijs

De doelen, inhouden, leerlijnen en didactische vormgeving van het huidige hoofdrekkenonderwijs zijn grofweg in de laatste vijftien jaar van het vorige millennium ontwikkeld. Het debat hierover begon met de formulering van eindtermen voor rekenen-wiskunde op de basisschool en de opzet van de eerste periodieke peiling van het onderwijsniveau (Wijnstra, 1988).

Hoofdrekken wordt op hoofdlijnen in de *Proeve van een nationaal programma voor rekenen-wiskunde op de basisschool* in de steigers gezet (Treffers en de Moor, 1990). De didactische principes, doorgaande lijn en werkwijze worden in verschillende contexten ontwikkeld en aangescherpt (Vuurmans, 1991; Veltman, 1993; Treffers en Veltman, 1994; Gravemeijer, 1994; Klein en Beishuizen, 1994; Verschaffel e.d., 1995; Tal-team, 1999; Menne, 2001).

We expliciteren hier de aspecten van het onderwijsaanbod en de onderwijspraktijk die relevant zijn voor het begrip van hoe leerlingen, halverwege de basisschool, optellen en afrekken tot honderd (en daarboven).

De relatie tussen hoofdrekken en cijferen

In tegenstelling tot in andere landen heeft hoofdrekken in Nederland altijd een eigen plaats in het rekenprogramma van de basisschool gehad. Meestal los van het cijferen, maar soms ook geïntegreerd met cijferen (Treffers, 1991). De relatie tussen cijferen en hoofdrekken staat begin jaren tachtig weer ter discussie naar aanleiding van het toenemende gebruik van zakrekenmachientjes en zakcomputers. Er verschijnen internationale rapporten waarin leraren wordt geadviseerd om complexe bewerkingen met de zakrekenmachine in plaats van cijferend te laten uitvoeren (N.C.T.M., 1980; Cockcroft, 1982). Er ontstaat een tweestrijd over hoofdrekken en cijferen, met aan de ene kant voorstanders van rekenonderwijs gericht op flexibel en schattend rekenen, zonder cijferen, en aan de andere kant voorstanders van een praktijk waarin cijferen wel degelijk een plaats blijft houden, zij het minder dominant dan voorheen.

Treffers (1983) kiest voor een derde weg. Hij ontwikkelt het leidende principe van de koerswijziging die het Nederlandse rekenonderwijs zo anders maakt dan dat in de ons omringende landen. Volgens hem kan men ook anders cijferen in plaats van minder of helemaal niet.

De ervaring die in proefscholen was opgedaan met het onderwijs in delen (Dekker e.a., 1982) en met remediërende activiteiten rond optellen-afrekken (Veldhuis, 1981) leerde dat men specifieke contexten in cijferleergangen kan vervlechten om de informele procedures die de leerlingen in die contexten inbrengen in de richting van het cijferen te transformeren. Zo ontstond de idee van *geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering*: de contextgebonden en stapsgewijze ontwikkeling van de rekenalgoritmen, vanuit de informele procedures die de leerlingen gebruiken bij hun oplossing van optel-, aftrek-, vermenigvuldig- en deelproblemen.

Deze aanpak zou, in de bewoording van Treffers, een uitweg bieden voor het dilemma rond cijferen en hoofdrekken in relatie tot het gebruik van de zakrekenmachine en de computer (p. 360). *Progressief schematiseren* werd uiteindelijk het leidende idee bij de integratie van

cijferen met hoofdrekenen, waarbij hoofdrekenprocedures stapsgewijs in min of meer algoritmische vormen van rekenen onder elkaar worden getransformeerd.

Drie hoofdrekenmethoden

Hoofdrekenen is rekenen met hele getallen, waarbij efficiënt gebruik wordt gemaakt van parate kennis, structuren van getallen en operaties en hun eigenschappen (Treffers en de Moor, 1990). Het is niet zozeer rekenen uit-het-hoofd, maar meer rekenen met-het-hoofd, al dan niet ondersteund met aantekeningen op papier. Zo opgevat is hoofdrekenen de tegenvoeter van het cijferen: algoritmisch rekenen met positiecijfers.

Begripsbepaling

In de Nederlandse en buitenlandse literatuur worden vier verschillende begrippen gebruikt om de wijze waarop de leerlingen rekenen aan te duiden. Terwijl de Utrechtse didactici aanvankelijk over onderwijs*methoden* spreken (Treffers, de Moor en Feys, 1987), signaleren de Leidse onderzoekers twee geobserveerde grondvormen van rekenen tot honderd die ze de 1010-procedure en G10-procedure noemen. Later wordt ook in de *Proeve van een nationaal programma voor rekenen-wiskunde op de basisschool* de term *methode* gebruikt (Treffers en de Moor, 1990). In de meest recente teksten hanteren de auteurs het begrip *aanpak* (Tal-team, 1999) en *strategie* (Menne, 2001).

De begrippen *aanpak* en *strategie* hebben sterk de connotatie van een bewuste keuze tussen alternatieve manieren van rekenen. Ze verwijzen minder dan het begrip *methode* naar kenmerken die de rekenhandelingen typeren. Daarom wordt in deze balans het woord *rekenmethode* gebruikt om de aard van de rekenhandelingen aan te duiden en het woord *rekenstrategie* om de gevolgde aanpak van een opgave aan te duiden, bijvoorbeeld een aftrekopgave via *aftrekken* of via *optellen (aanvullen)*.

In de nieuwe opzet van het reken-wiskundeonderwijs sluit het rekenen tot honderd direct aan bij het flexibel optellen en aftrekken tot 20, waarbij gebruikgemaakt wordt van bekende reken-procedures, rekenfeiten en rekenregels.

Vanaf het begin van de invoering van de nieuwe opzet zijn drie vormen van hoofdrekenen ontwikkeld: *rijgen*, *splitsen* en *variarekenen*, dat in deze balans *afleiden* wordt genoemd¹. Elke van deze drie hoofdrekenmethoden steunt op het efficiënte gebruik van structuren en eigenschappen van tellen, getallen en operaties.

Figuur 1.1 Oplossingen van opgave 1 met de drie vormen van hoofdrekenen

Rijgen	Splitsen	Afleiden
$12 + ? = 25$	$25 - 12 = ?$	
$12 + 10 = 22$; $22 + 3 = 25$	$20 - 10 = 10$; $5 - 2 = 3$	$2 \times 12 = 24$
$10 + 3 = 13$	$10 + 3 = 13$	één te weinig, dus 13

¹ *Variarekenen* wordt in de Tal-brochure (Tal-team, 1999) als een 'restcategorie van aanpakken' gebruikt, waarbij de leerling handig gebruikmaakt van gememoriseerde kennis en relaties tussen getallen en eigenschappen van bewerkingen. We gebruiken liever de term 'afleiden' om de handeling te duiden die het verschil maakt met 'rijgen' en 'splitsen'. De leerling die *afleidt* vindt zijn uitkomst door de numerieke gegevens van de opgave in relatie te brengen met een bekend rekenfeit of met een operatie die hij gemakkelijker kan uitrekenen. Hij redeneert op basis van relaties tussen operaties met behulp van rekeneigenschappen.

Bij *Rijgen* gebruikt de leerling de lineaire structuur van tellen en de onderlinge positie van de getallen in de telrij. Hij rekt sequentieel, vanaf één getal, in de twee telrichtingen, aanvankelijk met telstappen van één, vervolgens met sprongen van tien, tweetallen, vijftallen etc. en ten slotte, direct optellend en aftrekkend met tienvouden. De leerling voegt een getal toe of trekt een getal af door het in stukjes te delen. Hij maakt daarbij handig gebruik van tussenliggende getallen die als knooppunten op de rijweg functioneren. Rijgen lijkt in die zin op een treinreis tussen Den Haag en Arnhem langs de meest voor de hand liggende tussenstations.

Bij *Splitsen* gebruikt de leerling de *10-structuur* van het tellen en van de getallen. Beide getallen worden in tienvouden en eenheden gesplitst (zoveel groepen van tien, zoveel losse). De leerling telt de ontstane groepen op of trekt ze van elkaar af en hergroepeert vervolgens de stukjes in één getal met twee cijfers.

Afleiden is de meest abstracte vorm van hoofdrekenen, omdat de leerling relaties tussen getallen en bewerkingen en eigenschappen van bewerkingen gebruikt om de onbekende term van een opgave te vinden.

Bij het rekenen tot 10 en 20 gebruikt de leerling getalstructuren, rekenfeiten en rekenregels om nieuwe rekenfeiten, redenerend te reconstrueren, bijvoorbeeld:

- de kennis van 'dubbelen' ($2 + 2$ en $4 + 4$) om 'bijna-dubbelen' uit het hoofd te leren: $2 + 3$ via $4 (2 + 2) + 1$ en $4 + 5$ via $10 (5 + 5) - 1$;
- het veranderen van $5 + 7$ in $6 + 6$;
- het omkeren: $2 + 7$ via $7 + 2$;
- het splitsen bij vijf: $6 + 7$ via $(5 + 5) + (1 + 2)$
- het splitsen bij 10: $18 - 6 = 10 + (8 - 6)$;
- aftrekken via doortellen: $13 - 7$ via $7 + ? = 13$;
- het gebruik van 10 als tussenuitkomst (associatieve eigenschap): $8 + 4 = (8 + 2) + 2$.

Afleiden in het getalgebied tot honderd is verankerd in het inzicht dat elk getal en elke operatie verwisselbaar of vervangbaar is. Het lijkt in die zin het meest op wat vroeger *eigenschapsrekenen* werd genoemd.

Nadruk op rijgen

In het vernieuwingsvoorstel van de *Proeve* wordt in de didactiek voor jaargroep 4 om vier redenen de nadruk op rijgen gelegd:

- rijgen sluit aan bij de informele teloplossingen van de kleuters (doorgaande lijn tussen tellend rekenen in de onderbouw en rijgen in de middenbouw);
- leerlingen kunnen in eigen tempo en op eigen niveau hun rijgprocedures formaliseren (natuurlijke differentiatie);
- ze kunnen hun rijgprocedures efficiënt op de context en/of de getallen afstemmen (flexibel rekenen);
- door het herhaalde gebruik van gevarieerde getalrelaties ontwikkelt de leerling een gevoel voor en begrip van getallen en operaties dat breed toepasbaar is (gecijferdheid).

In de oorspronkelijke vorm van rijgen gebruikten de leerlingen het zogenoemde honderdveld om hun rijghandelingen sequentieel te structureren. Eind jaren tachtig koppelt Treffers (1989) het sprongsgewijs tellen aan het idee van Whitney (zie Menne, 2001) om rekenstappen op een lege getallenlijn te noteren. Het grote voordeel voor de leerling ten opzichte van het honderdveld is dat hij elke rijgoplossing volgens een persoonlijk en eenduidig rekenschema kan modelleren. De leraar kan deze symbolisering als uitgangspunt nemen om overeenkomsten en verschillen tussen oplossingswijzen te helpen ontdekken die toegang geven tot het begrip van de kern van de bewerking *optellen* en *afrekken* (Gravemeijer, 2003a en 2003b).

Splitsen wordt pas systematisch aan de orde gesteld als de leerling voldoende inzicht heeft

verworven in de positionele ordening van eenheden om te begrijpen hoe het tellen met groepen van tien en losse eenheden kan worden getransformeerd in samengesteld optellen en aftrekken met positiegetallen. Bijvoorbeeld: € 23,- bij € 25,- is evenveel als 4 briefjes van 10 (10, 20, 30, 40) plus € 8,-, is samen € 48,-. Dit betekent dat splitsen in de praktijk pas in de loop van de tweede helft van jaargroep 5 nadrukkelijk meer aandacht krijgt.

Variarekenen wordt ten slotte voortdurend op de achtergrond gehouden en min of meer systematisch uitgelokt door het veranderen van de context of de getallen van de voorgelegde rekenopgaven.

Flexibel hoofdrekenen haalbaar

Flexibel rekenen staat tegenover rekenen volgens vaste handelingsvoorschriften. Het betekent dat de leerling zijn hoofdrekenmethode (rijgen, splitsen of afleiden) en zijn rekenhandelingen afstemt op de context en/of de getallen van de rekensituatie. Voorwaarde hiervoor is dat hij alle drie de methoden en bijbehorende procedures kan toepassen en dus van aanpak kan wisselen.

Wel of niet voor iedereen

Dit flexibel optellen en aftrekken is, vanaf het begin van de invoering, een geschilpunt geweest in het debat tussen de experts. Het argument van de vernieuwers om alle drie de rekenmethoden in de communale doelen op te nemen was dat elke rekenmethode haar 'sterktes en zwaktes' heeft (figuur 1.2). Als ze worden gecombineerd, dan kunnen de nadelen van de ene methode door de voordelen van de andere ondervangen worden.

Figuur 1.2 Sterktes en zwaktes van rijgen, splitsen en afleiden

Rekenmethoden	Sterk	Zwak
Splitsen	• Orde van grootte van de uitkomst komt van meet af aan in zicht.	• Risico dat de leerling een foutief aftrekalgoritme aanleert.
Rijgen • Er kan volgens dezelfde systematiek in beide richtingen worden gerekend. • Geeft toegang tot de strategie van aanvullend optellen (winkelmethode van geld teruggeven).	• Orde van grootte van de uitkomst komt van meet af aan in zicht.	• Vergt een sterke differentiatie van het leerproces.
Afleiden	• De verworven kennis van getallen en operaties wordt uitgebuit.	• Sluit beperkt aan bij het leervermogen van de minder vaardige leerlingen.
Bron: Treffers, de Moor en Feijs, 1987		

Didactici en onderzoekers uit het voormalige Speciaal Onderwijs vonden flexibel rekenen voor 'hun' leerlingen nastrevenswaardig, maar veelal onhaalbaar (Luit, 1988; Blakenburg, 1988). Zij vonden dat minimumdoelen voor het onderwijs moesten worden ingevoerd voor leerlingen die al moeite hadden met de reconstructie van optellen en aftrekken tot 20. Omdat de minst vaardige leerlingen en zwakke rekenaars uit de basisschool faalden in het combineren van verschillende manieren van rekenen, zou flexibel rekenen moeten worden uitgesteld tot de leerling vlot en inzichtelijk met vaste methoden kan optellen en aftrekken. Van der Heijde (1988), die handig en flexibel hoofdrekenen in het reguliere onderwijs onderzocht, zette ook vraagtekens bij de haalbaarheid van flexibel hoofdrekenen, op grond van aanwijzingen dat:

- spontaan, handig rekenen weinig voorkwam;
- de kleine groep leerlingen die handig rekende vooral bestond uit de beste rekenaars van de klas;
- leerlingen aan het begin noch aan het einde van jaargroep 5 vaker gebruikmaakten van een handige rekenstrategie dan aan het einde van jaargroep 4.

Beishuizen en Van Mulken (1988), die deel uitmaakten van dezelfde Leidse onderzoeksgroep als Van der Heijde, deelden bovendien **niet** de mening dat het accent op het rijgen moest liggen. Volgens hen moesten leerlingen in jaargroep 4 rijgen én splitsen leren beheersen om op basis van beide methoden flexibel te leren rekenen. Deze onderzoekers vroegen in dit perspectief ook meer aandacht voor de relatief vaak gebruikte combinatie van splitsen en rijgen (figuur 1.3) die behoorlijk effectief bleek te zijn (zie figuur 1.4).

Figuur 1.3 – Combinatie van 1010-procedure (splitsen) en G10-procedure (rijgen) zoals geobserveerd door Beishuizen en Van Mulken (1988)

Rijgen	Splitsen
46 + 23 via	63 – 38 via
40 + 20 = 60	60 – 30 = 30
60 + 6 = 66; 66 + 3 = 69	30 + 3 = 33; 33 – 8 = 25

Interactie tussen de getallen en de context

Na de invoering van de kerndoelen is flexibel hoofdrekenen in verschillende contexten verder onderzocht. In eerste instantie wordt de invloed van de getallen bij 'kaal rekenen' onderzocht (Van Mulken, 1992). Goede rekenaars blijken hun aanpak en berekeningen op de getallen van de voorgelegde splitsommen (die in wezen stipsommen zijn) af te stemmen. Ze trekken af of vullen aan, afhankelijk van de relatieve grootte van het gegeven part (figuur 1.4). Later zijn de zogenoemde verschilsommen gebruikt, al of niet in combinatie met puur aftrekproblemen, om de invloed van de context en van de getallen en de interactie ertussen te kunnen observeren (Hoogenberg & Paardekoper, 1995; De Joode, 1996; Klein, 1998).

Het onderzoek van Klein geeft duidelijke aanwijzingen over de interactie tussen de context en de getallen. Het lijkt alsof de context én de getallen in de loop van jaargroep 4 verward zijn in een strijd om de aandacht van de leerling totdat de leerlingen zover zijn dat ze de specifieke eigenschappen van de rekensituatie direct met een daarbij passende rekenstrategie en -procedure associëren.

Figuur 1.4 Twee aftrekstrategieën van een goede rekenaar

32 – 24 = ?	32 – 7 = ?
via	via
24 + 6 + 2, dus 8	32 – 2 = 30 en 30 – 5 = 25

De eerste aanwijzing voor dit laatste is dat de vorm van de opgave bij optellen er niet toe doet. Een optelprobleem dat de som $54 + 29$ (c.q. $33 + 34$) contextualiseert, wordt niet anders aangepakt en uitgerekend dan een vergelijkbare contextloze som, bijvoorbeeld $54 + 39$ (c.q. $42 + 43$). De getallen in deze contexten en kale sommen lokken echter wél verschillende rekenhandelingen uit, tenminste, als deze vorm van flexibel rekenen structureel de aandacht krijgt. Optellingen als $54 + 29$ en $54 + 39$ worden hoe langer hoe meer via afronden en

compenseren opgelost ($54 + 30 - 1$; $54 + 49 - 1$), terwijl de leerlingen optellingen als $33 + 34$ en $42 + 43$ volgens de standaard rijgprocedure uitrekenen.

Typerend voor het leren optellen is ook dat leerlingen meer gaan splitsen en minder gaan rijgen zodra de leraar de splitsmethode introduceert.

De interactie tussen context en getallen is bij de aanpak en de oplossing van aftrekopgaven minder doorzichtig dan bij optelopgaven, omdat de variatie in rekencondities veel groter is.

Klein vergelijkt in zijn onderzoek de interactie tussen de context en de getallen aan de hand van drie typen opgaven:

- aftrekproblemen van het type $84 - 29$, $71 - 69$ en $75 - 36$, waarbij aftrekken de betekenis heeft van *weghalen*;
- contextloze aftrekkingen met vergelijkbare getallen;
- rekensituaties waar de leerlingen het verschil in prijs tussen twee afgebeelde voorwerpen moeten uitrekenen (c.q. het verschil in gewicht tussen twee personen).

Niets wijst erop dat leerlingen kale aftrekkingen anders aanpakken en uitrekenen dan aftrekproblemen waar aftrekken de betekenis heeft van *weghalen*. Leerlingen associëren blijkbaar elk aftrekprobleem met de aftrekking die het verhaal contextualiseert.

Leerlingen die de nieuwe realistische aanpak volgen, stemmen, in beide typen rekensituaties, hoe langer hoe meer hun rijgprocedure af op de getallen. Aftrekkingen als $84 - 29$ worden meer en meer via afronden en compenseren uitgerekend ($84 - 30 + 1$) en aftrekkingen als $71 - 69$ via de inverse relatie tussen optellen en aftrekken – de zogenoemde boogprocedure (2, want $69 + 2 = 71$). Leerlingen die de meer gesloten aanpak volgen, passen vaker de standaard aftrekprocedure toe, behalve als het verschil tussen beide getallen erg klein is.

De zogenoemde verschilopgaven lokken in beide onderzoeksgroepen, globaal genomen, hetzelfde patroon van oplossingswijzen uit. Ook de leerlingen die niet nadrukkelijk flexibel leren rekenen, hebben bij deze opgaven de neiging om de afstand tussen het kleinste getal en het grootste getal aanvullend optellend te overbruggen, als de afstand tussen beide getallen relatief klein is. Dit maakt het verschil met aftrekproblemen, die vrijwel altijd met *weghalen* worden geassocieerd en daarom aftrekhandelingen uitlokken. Opvallend is ook dat leerlingen bij deze aanvulaanpak, vaker dan in andere aftreksituaties, via het tiental rekenen in plaats van eerst tien verder te springen.

Formalisering van rijgen, splitsen en afleiden

‘Progressief schematiseren’ betekent dat de leerling een informele manier van rekenen in de richting van een formele rekenprocedure of redenering transformeert. Het duidt de geleidelijke verandering aan van de kinderlijke, intuïtieve en/of informele vormen van rijgen, splitsen en afleiden in formele bewerkingen en redeneringen.

In de huidige rekenmethoden volgen de auteurs, wat het rijgen betreft, de didactische sequentie in drie niveaus van formalisering zoals die door het Tal-team is geïntroduceerd:

- tellend rekenen (informeel, contextgebonden);
- structurerend rekenen (semiformeel, met behulp van modellen);
- formeel rekenen (formeel, vakmatig).

Deze drie niveaus worden hieronder toegelicht.

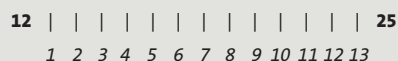
Tellend rekenen

Een leerling lost opgave 1 (zie pagina 30 voor de opgaven) tellend op, als hij bijvoorbeeld, één voor één doortellend, de afstand tussen 12 en 25 overbrugt. Hij denkt daarbij aan de munten die hij achter elkaar op de stapel van 12 legt tot hij 25 munten krijgt (figuur 1.5a). Leerlingen houden meestal met hun vingers bij hoeveel telstappen ze hebben gemaakt. Ze komen in dit geval vingers tekort en kunnen hierdoor fouten maken bij de reconstructie van het totale aantal vingers. Sommige leerlingen voorkomen dit probleem door de telstappen met turfjes te symboliseren, zoals aangegeven in het tweede voorbeeld van figuur 1.5a.

Figuur 1.5 Oplossingen van opgave 1 op drie niveaus van formalisering

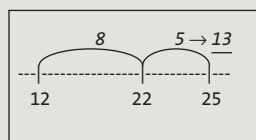
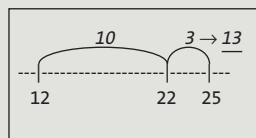
1.5a Tellend rekenen

13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

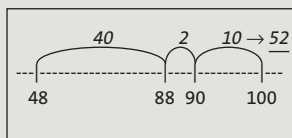


1.5b Structurerend rekenen

Oplossing van opgave 1



Oplossing van opgave 9



1.5c Formeel rekenen

- 50 100 52 (bedoeld wordt: $48 + 2 = 50$, $50 + 50 = 100 \rightarrow 50 + 2 = 52$)
- $48 + 40 = 88$; $88 + 2 = 90$; $90 + 10 = 100 \rightarrow 40 + 10 + 2 = 52$

Structurerend rekenen

Een leerling rijgt structurerend, als hij de optelling of aftrekking in parten structureert, springend van het ene getal naar het andere. Kenmerkend voor dit niveau is, dat de leerling zijn handelingen op de getallenlijn modelleert, zoals aangegeven in figuur 1.5b. Aanvankelijk gebruiken de leerlingen de zogenoemde 10-sprong en de sprong via het tiental. Later tellen ze op en trekken ze af met tienvouden, gebruikmakend van handige getalstructuren (zie de oplossing van opgave 9 in figuur 1.5b).

Formeel rekenen

Op het meest formele niveau handelen de leerlingen volledig uit het hoofd, of schrijven ze (tussen-)berekeningen op (figuur 1.5c).

Leerlingen die op het formele niveau 'op lijn' rekenen, gebruiken volgens het Tal-team ook herkenbare vormen van *tientallig splitsen* (splitsen) en *variarekenen* (afleiden).

Kenmerkend voor dit *splitsen* is dat de leerling, na de splitsing van beide getallen in tientallen en eenheden, gestandaardiseerde rekenstappen maakt:

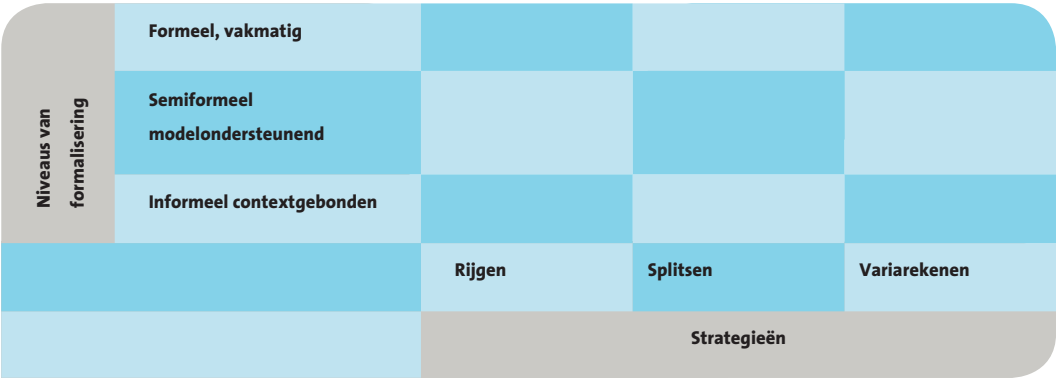
- $48 + 29$ via $40 + 20 = 60$, $8 + 9 = 17$; $60 + 17 = 77$;
- $77 - 29$ via $70 - 20 = 50$; $7 - 9$, 2 tekort; $50 - 2 = 48$.

Kenmerkend voor dit *afleiden* is dat de leerling de betreffende optelling en aftrekking in een gemakkelijke bewerking transformeert, gebruikmakend van het principe van de gelijk blijvende som en het gelijk blijvende verschil:

- $48 + 29$ via $50 + 30$ en 3 eraf;
- $77 - 29$ via $78 - 30$.

Het Tal-team spreekt zich niet uit over de progressieve schematisering van splitsen en afleiden. Menne (2001) stelt dat de globale gang van het onderwijzen en leren rekenen in het getalgebied tot 100 kan worden gestructureerd uitgaande van een sequentie van rijgen, splitsen en variarekenen in drie opeenvolgende niveaus van formalisering (p. 31; figuur 1.6).

Figuur 1.6 Drie fasen in de formalisering van het rekenen tot 100 (Menne, 2001, p. 31)
Niveaus van formalisering Formeel, vakmatig



De formalisering van het splitsen verloopt zoals globaal beschreven in figuur 1.7. Menne adviseert het gebruik van contextproblemen die naar de 10-structurering van getallen verwijzen (geld, tienbundels, geturfde aantallen en decimaal inpakmateriaal). In zijn voorbeeld beeldt de leerling de aanschaf van een cadeau uit. Hij handelt daarbij met briefjes van 10 euro en euromunten (eerst 4 tientjes weghalen en vervolgens nog 8 euro) en symboliseert vervolgens de uitgevoerde rijghandelingen in pijlentaal. Deze rijghandelingen worden daarna, via de combinatie van splitsen met rijgen, stapsgewijs getransformeerd tot kolomsgewijs splitsen. In de bewoording van Menne, kan ook ‘het handige, flexibele rekenen (variarekenen) concreet met contextrijke situaties en passende modellen worden onderbouwd’ (p. 33).

Het voorbeeld van Tom (63 jaar) en Tine (48 jaar) in figuur 1.8 illustreert hoe de leerlingen, vanuit een lineaire schematisering van een probleem, op het spoor van getalrelaties komen die vervolgens in formele taal worden genoteerd.

Figuur 1.7 De drie fasen in de formalisering van splitsen (Menne, 2001, p. 32-33)

Informeel, contextgebonden
 Uitbeelden met decimaal materiaal (briefjes van 10 euro en euromunten) en rijgend uitrekenen in pijlentaal.
 Voorbeeld: Tom had 63 euro. Hij geeft 48 euro uit voor een cadeau. Hoeveel euro heeft hij nog over?

$$\begin{array}{r} -40 \quad -3 \quad -5 \\ 63 \rightarrow 23 \rightarrow 20 \rightarrow 15 \end{array}$$

Semiformeel, modelondersteunend
 Transformatie van de rijghandelingen in (semi-)splitshandelingen die lineair zijn genoteerd:

$$\begin{array}{r} -40 \quad +3 \quad -8 \qquad \qquad -40 \quad -5 \\ 60 \rightarrow 20 \rightarrow 23 \rightarrow 15 \text{ en vervolgens } 60 \rightarrow 20 \rightarrow 15 \end{array}$$

Formeel, vakmatig

Transformatie van de lineaire splitsnotatie in een kolomsgewijze notatie (onder elkaar):

$$\begin{array}{r} 63 \\ 48 - \\ \hline 20 \\ - 5 \\ \hline 15 \end{array}$$

Figuur 1.8 Drie niveaus van variarekenen (Menne, 2001, p. 33-34)

Voorbeeld: Tom is 63 jaar en Tine 48 jaar. Hoeveel jaar verschillen ze in leeftijd? En hoeveel is dat verschil over twee jaar?

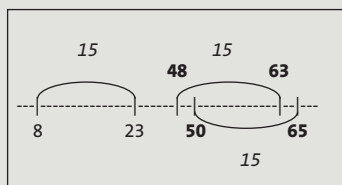
Informeel, contextgebonden

Uitbeelden van het verschil in leeftijd over de tijd.

Na reflectie en discussie is de uitkomst dat $63 - 48$ evenveel is als $65 - 50$.

Semiformeel – modelondersteunend

De leerling beweegt met een afgepaste maat van 15 tussen duim en wijsvinger over de getallenlijn en demonstreert dat het verschil tussen 63 en 48 even groot is als dat tussen 65 en 50 of 23 en 8, en dat dit verschil eenvoudig overbrugd kan worden door van 48 naar 63 of eenvoudiger van 50 naar 65 te springen.

**Formeel, vakmatig**

$$63 - 48 = 65 - 50 = 15$$

Differentiatie

Vanuit bovenstaande invalshoek krijgt ieder kind, binnen zekere grenzen, de ruimte om naar eigen voorkeur en niveau te rekenen. Hij kan:

- zijn eigen rekenweg volgen (rekenmethoden);
- de strategie en procedure gebruiken die hij het meest vertrouwt (voorkeur);
- een eigen systeem van getalrelaties gebruiken (referenties);
- min of meer verkort en formeel rekenen (niveau van formalisering).

De leraar moet echter het spectrum van gebruikte rekenhandelingen binnen de perken houden, zodat alle leerlingen in de grote groep met elkaar kunnen blijven communiceren bij de reflectie op ingebrachte oplossingen. Menne (2001) schetst de ideale situatie als volgt: 'De goede rekenaars lopen al op eigen kracht vooruit op wat in de totale groep nog aan de orde wordt gesteld, terwijl tegelijkertijd de achterblijvers het zicht op de middengroep en de voorhoede niet verliezen' (p. 40).

Hoofdrekenen in rekenmethoden

De auteurs van op scholen gebruikte rekenmethoden stellen in hun algemene inleiding dat ze hun leergang *Rekenen tot honderd* volgens bovenstaande didactische aanpak hebben ingericht.

Menne (2004), die deze leerlijn met het realistische beschrijvingskader heeft vergeleken, zegt hierover het volgende:

- In de meeste leerboeken symboliseren de leerlingen in de eerste helft van jaargroep 4 hun tel- of meethandelingen op een (gedeeltelijk) gevulde getallenlijn. In het verlengde hiervan leren ze de rekenstappen van de meest simpele optellingen en aftrekkingen (bijvoorbeeld $35 + 24$ en $50 - 35$) op een lege getallenlijn af te beelden. Complexe opgaven met tientaloverschrijdingen als $35 + 19$ en $62 - 48$ worden pas aan het einde van jaargroep 4 geïntroduceerd.
- Met uitzondering van *Operatoir rekenen* en *Rekenrijk* wordt in alle rekenmethoden voornamelijk de conventionele taal gebruikt om rekenstappen te noteren en geen pijlentaal, zoals aanbevolen door het Tal-team.
- De rijgmethode staat alleen in de leerboeken van *Rekenrijk* voorop.
- In alle gebruikte rekenmethoden worden uiteenlopende hulpmiddelen gebruikt om inzichtelijk te leren rijgen.

Menne komt tot de conclusie dat in sommige methoden de rekenlijn niet altijd duidelijk is, noch de functie die de lege getallenlijn vervult bij het ordenen, lokaliseren en opereren in het getalgebied tot 100. Naar haar oordeel zou de leerlijn van de nu gebruikte leerboeken op meer punten kunnen worden verbeterd om zo optimale resultaten bij optellen en aftrekken tot 100 te kunnen bereiken (p. 11).

Het meer algoritmisch rekenen wordt in de meeste lesmethoden eind jaargroep 5 / begin jaargroep 6 geïntroduceerd. Het samengesteld optellen en aftrekken met tienvouden en eenheden wordt in kolomsgewijs optellen en aftrekken getransformeerd, al dan niet via de combinatie van splitsen en rijgen.

1.3 Onderzoeksvragen

Dit onderzoek moet aanwijzingen geven over hoe leerlingen halverwege de basisschool hoofdrekenen. Het gaat in het bijzonder om aftreksituaties en dan vooral om contextsituaties waarin aftrekken een andere betekenis heeft dan weghalen ('erafsommen'). Deze contexten blijven namelijk problematisch. In het licht van de kern- en tussendoelen en rekening houdend met de leerlijn van de op scholen gebruikte rekenmethoden, hebben we hoofdrekenoplossingen binnen vijf thema's vanuit de volgende onderzoeksvragen verzameld en geanalyseerd.

Over de algemene trend

Succes in relatie met de gebruikte hoofdrekenmethode (hoofdstuk 3)

- A Hoe vaak gebruiken leerlingen uit jaargroep 5 de hoofdrekenmethoden rijgen, splitsen, afleiden en geheugenfeiten bij het oplossen van een reeks optel- en aftrekopgaven die in hun vaardigheidsbereik liggen?
- B Hoe succesvol worden deze hoofdrekenmethoden toegepast?

Flexibel gebruik van de geleerde hoofdrekenmethoden (hoofdstuk 4)

- A Volgens welk patroon en hoe vaak wisselen de leerlingen rijgen af met splitsen, afleiden en geheugenfeiten?
- B Hoe succesvol zijn de leerlingen die rijgen met één of meer andere hoofdrekenmethoden combineren?

Invloed van het vaardigheidsniveau (hoofdstuk 5)

- A In hoeverre hangt de gebruiksfrequentie van rijgen samen met het vaardigheidsniveau van de leerling?

Kaal rekenen (hoofdstuk 6)

- A Hoe vaak gebruiken leerlingen uit jaargroep 5 rijgen, splitsen, afleiden en geheugenfeiten bij kaal rekenen en hoe succesvol worden deze hoofdrekenmethoden toegepast?
- B Hoe vaak en hoe succesvol passen leerlingen de mengvorm splitsen-rijgen toe?
- C Hoe vaak en hoe succesvol gebruiken leerlingen uit jaargroep 5 bij kaal aftrekken optellen tot (of aftrekken tot) als alternatief voor aftrekken?

Over rijgend aftrekken

Flexibel rijgen (hoofdstuk 7)

Met betrekking tot de gevolgde aftrekstrategie

- A Hoe systematisch stemmen leerlingen hun aftrekstrategie af op de context?
- B Welke indicatie geeft de variatie in het gebruik van aftrekken, optellen tot en aftrekken tot over de interactie tussen de invloed van de context en die van de getallen?
- C Hoe sterk varieert het aantal correcte antwoorden per gebruikte aftrekstrategie?
- D In welke mate hangt de gebruiksfrequentie van de aftrekstrategieën samen met het vaardigheidsniveau van de leerling?

Met betrekking tot de gebruikte rijgprocedures

- E Hoe vaak gebruiken leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog de verschillende aftrekprocedures en hoe goed worden deze procedures beheerst?

Met betrekking tot de afstemming van de rijgprocedure op de aftrekstrategie

- F Hoe combineren de leerlingen hun rijgprocedure met de gevolgde aftrekstrategie?
- G Hoe sterk varieert het succes per gebruikte combinatie van strategie en procedure?

Formalisering (hoofdstuk 8)

- A Is het mogelijk om op basis van de geobserveerde rijgoplossingen te beschrijven hoe leerlingen hun oorspronkelijke telhandelingen met objecten stapsgewijs tot gestandaardiseerde rijgprocedures formaliseren?
- B Op welk niveau van formalisering rijgen de leerlingen uit de groep Laag, Midden en Hoog?
- C In hoeverre hangt het niveau van formalisering samen met het vaardigheidsniveau van de leerling?

Structurele fouten (hoofdstuk 9)

- A Welke structurele fouten maken leerlingen bij rijgend aftrekken? En: wat is de bron van deze problemen?

Over splitsend en redenerend aftrekken

Splitsend aftrekken (hoofdstuk 10)

- A Welke aftrekstrategie volgen de leerlingen als ze splitsen? En: wat zijn de prestaties per gevolgde strategie?
- B Hoe vaak worden de twee geleerde splitsprocedures gebruikt? Hoe presteren de leerlingen met de gebruikte splitsprocedures?
- C Is het mogelijk om op basis van de geobserveerde splitsberekeningen te beschrijven hoe leerlingen hun oorspronkelijke splitshandelingen formaliseren?
En: Op welk niveau splitsen leerlingen uit de groep Laag, Midden en Hoog, halverwege de basisschool?
- D Welke structurele fouten maken leerlingen bij splitsend aftrekken? En: wat is de bron van deze problemen?

Redenerend aftrekken (hoofdstuk 11)

- A Welke aftrekstrategie volgen de leerlingen als ze afleiden? En: leidt de ene strategie vaker tot een juiste uitkomst dan de andere?
- B Welke typen redeneringen volgen leerlingen bij afleiden en welke relaties en reken-eigenschappen hebben ze daarvoor nodig?
- C Is het mogelijk om op basis van de geobserveerde afleidingen te reconstrueren hoe leerlingen hun oorspronkelijke afleidhandelingen formaliseren? En: op welke niveau leiden dan leerlingen uit jaargroep 5 meestal af?
- D Welke structurele fouten maken leerlingen bij splitsend aftrekken? En: wat is de bron van deze problemen?

Over restoplossingen bij aftrekken (hoofdstuk 12)

- A Hoe zijn de oplossingen binnen de restcategorie verdeeld?
- B Hoe varieert deze verdeling onder invloed van de moeilijkheidsgraad en andere kenmerken van de gemaakte opgaven?
- C Welke typen oplossingen en fouten bepalen het sterkst het succes (c.q. falen) van de leerlingen bij aftrekken onder de 1000?

Aan de slag (hoofdstuk 13)

Welke verbeteringsdoelen kunnen leraren, rekenexperts en onderzoekers voor zichzelf stellen op basis van de gevonden aanwijzingen over de gebruikte hoofdrekenstrategieën en -procedures, de slagvaardigheid en de gemaakte typen fouten halverwege de basisschool?

In hoofdstuk 2 wordt op hoofdpunten beschreven hoe het onderzoek op basis van bovenstaande vragen is opgezet.

2 Opzet van het onderzoek

Het onderzoek naar hoofdrekenstrategieën en -procedures moet aanwijzingen geven over hoe leerlingen halverwege de basisschool hoofdrekenen, vooral in aftreksituaties en in het bijzonder in contextsituaties waar aftrekken een andere betekenis heeft dan weghalen ('erafsommen'). In dit hoofdstuk worden de voorgelegde opgaven en de deelnemende leerlingen gepresenteerd, evenals het categorieënsysteem dat gebruikt is om de oplossingswijzen en de gemaakte fouten te analyseren.

2.1 Opgavensets

Zeventien opgaven zijn voor het onderzoek geselecteerd, twee optelopgaven en vijftien aftrek-opgaven. Ze zijn gekozen uit de omvangrijke verzameling die is gebruikt om het peilingonderzoek Rekenen-wiskunde en het onderzoek voor de toetsen Rekenen-wiskunde in het leerling- en onderwijsvolgsysteem (LOVS) van Cito uit te voeren. Deze zeventien opgaven zijn op basis van onderstaande inhoudelijke overwegingen geselecteerd en in drie opeenvolgende sets gegroepeerd.

Er is bewust voor gekozen om de nadruk te leggen op de aanpak en oplossingen van aftrekproblemen, en dan vooral in contextsituaties waar aftrekken een andere betekenis heeft dan weghalen. Dit werd gemotiveerd door de aanwijzingen in de derde rekenpeiling dat dergelijke contextopgaven meer problemen opleverden dan de standaardaftrekproblemen en niet al te complexe kale aftrekkingen. Het experimentele onderzoek van Klein naar het effect van het bewust variëren van contexten en getallen om flexibel te leren hoofdrekenen nodigde bovendien uit om vast te stellen hoe en in hoeverre leerlingen uit jaargroep 4 (5) flexibel aftrekken.

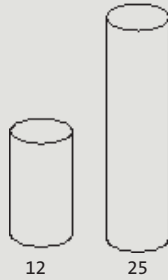
Een tweede aandachtspunt bij de inhoudelijke selectie komt voort uit het streven om vast te stellen hoe formeel en hoe flexibel leerlingen met een laag, gemiddeld, en hoog vaardigheidsniveau hoofdrekenen, uitgaande van het waargenomen verschil in voortgang tussen de minst en de meest vaardige leerlingen uit jaargroep 5. De gemakkelijkste set opgaven zou aan moeten sluiten bij de meest informele vormen van hoofdrekenen. De middelste set zou een beroep moeten doen op de meer gestandaardiseerde en de meer open rekenprocedures die leerlingen in de loop van jaargroep 5 zouden moeten leren beheersen. Met de moeilijkste set opgaven zou ten slotte moeten worden vastgesteld in hoeverre de meest gevorderde leerlingen in staat zijn om de rekenprocedures, die ze voor het bewerken van getallen kleiner dan 100 hebben geleerd, geschikt weten te maken voor optellen en aftrekken in het getalgebied tot 1000 (en zelfs daarboven).

Op aftrekprobleem 11 na zijn alle opgaven speciaal voor dit onderzoek ontworpen, zo mogelijk naar analogie van opgaven uit eerdere peilingsonderzoeken of LVS-afnamen waarvan de moeilijkheidsgraad bekend was. Uiteindelijk zijn de zeventien hier gepresenteerde opgaven geselecteerd om de toegepaste rekenstrategie en -procedures, het succes en de meest voorkomende fouten in relevante optel- en aftreksituaties te kunnen observeren. De verwachting met betrekking tot invloed van de context en de getallen op de gevolgde strategie en gebruikte

hoofdrekenmethode is gebaseerd op de in hoofdstuk 1 besproken onderzoeksgegevens van Klein (1998).

Opgaven

- 1 Hoeveel munten moet je op de stapel van 12 leggen om een stapel van 25 munten te krijgen?



_____ munten



Joyce weegt 18 kilo. Zij is lichter dan Lex.
Hoeveel kilo lichter?

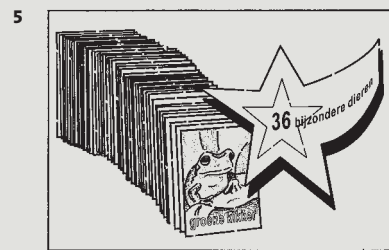
_____ kilo



Fatima bewaart 50 postzegels in deze doos.
In de la van België liggen 25 postzegels.
Hoeveel postzegels liggen dan in de la van Nederland.

_____ postzegels

- 4 $60 - 35 =$ _____



Er zijn 36 verschillende plaatjes.
Nicky heeft al 25 plaatjes.
Hoeveel plaatjes mist zij nog?

_____ plaatjes



De bloes met de korte mouwen is goedkoper dan de andere bloes.
Hoeveel goedkoper?

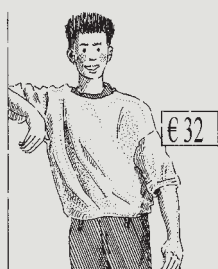
_____ euro



Anne koopt deze twee boeken.
Hoeveel kosten deze boeken samen?

_____ euro

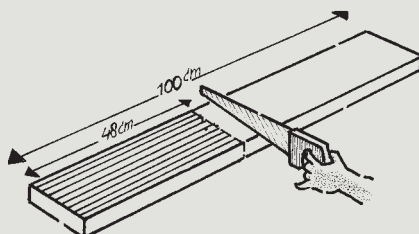
8



Moeder betaalt de trui met een briefje van 50 euro.
Hoeveel krijgt ze terug?

_____ euro

9



Je zaagt de plank door.
Het ene stuk is 48 centimeter lang.
Hoe lang is het andere stuk?

_____ centimeter

10 $100 - 86 =$ _____

11

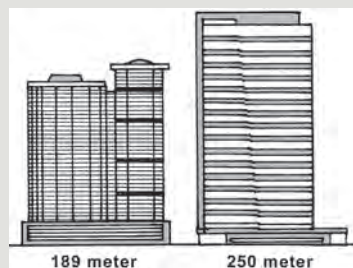


Het boek heeft 102 bladzijden.
Joost heeft 90 bladzijden gelezen.
Hoeveel bladzijden moet hij nog lezen om het boek uit te krijgen?

_____ bladzijden

12 $62 - 48 =$ _____

13



Het hoogste gebouw is 250 meter hoog.
Het laagste gebouw is 189 meter hoog.
Hoe groot is het verschil?

_____ meter

14



620 kinderen hebben gestemd.
370 kinderen willen eerst een zwembad.
De andere willen eerst een speelplein.
Hoeveel kinderen willen eerst een speelplein?

15 $306 + 698 =$ _____

16



De ouders van Mario hebben 900 euro op hun spaarrekening.
Ze gebruiken dit geld om deze fiets te kopen.
Hoeveel geld houden ze over?

_____ euro

Opgaven (vervolg)

17

$998 + \text{[vlek]} = 1662$

Welk getal ligt onder de vlek?

Figuur 2.1 Kenmerken van de 17 opgaven

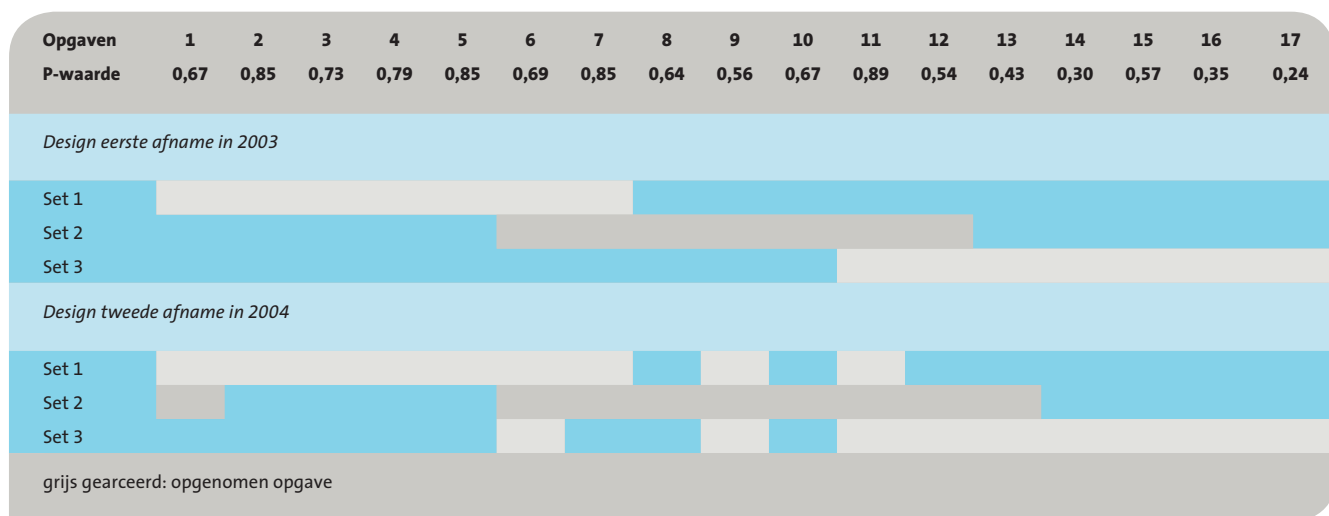
Aftrekken						
Nr	Vorm	Betekenis van aftrekken	Verwachte strategie	Verwachte hoofdrekenmethode*		
				Rijgen	Splitsen	Afleiden
1	context	Aanvullen	Optellen tot	+	++	++
5	context			+	++	
8	context			++	?	
11	context			++		+
17	kaal			++		+
2	context	Verschil bepalen	Aftrekken tot	++		++
6	context			+	?	++
13	context		Optellen of atrekken tot	++		
3	context	Part bepalen	Geen aanwijzingen hierover	++	?	
9	context			++	?	
14	context			++		
4	kaal	Afhalen	Optellen of atrekken tot	++	?	++
10	kaal			++	?	
12	kaal			++	?	+
16	context			++		+
Optellen						
7	context	Samennemen/erbij doen	optellen	++	?	+
15	kaal			++		+
* ++ sterk + matig ? afhankelijk van het aanbod						

2.2 Onderzoeksdesign

Het onderzoek is twee keer uitgevoerd, de eerste keer in het kader van het vierde peilings-onderzoek PPON voor rekenen-wiskunde halverwege het basisonderwijs (Kraemer e.a., 2005), de tweede keer in het kader van het proefonderzoek voor de ontwikkeling van nieuwe reken-toetsen van het Leerling- en onderwijsvolgsysteem (Janssen e.a., 2006).

Conform het onderzoeksdesign voor de PPON-afname kregen de leerlingen, in drie onderscheiden vaardigheidsgroepen (Laag – Midden – Hoog), zeven opgaven voorgelegd die binnen hun vaardigheidsbereik lagen. De opgaven waren dus ‘op maat’. Set 1 voor de groep Laag was het gemakkelijkst, set 3 voor de groep Hoog het moeilijkst. Omwille van de vergelijking maakten de leerlingen van aansluitende vaardigheidsgroepen bij dit design telkens twee gemeenschappelijke opgaven (opgave 6 en 7 voor de groep Laag en Midden en opgave 11 en 12 voor de groep Midden en Hoog).

Figuur 2.2 Het onderzoeksdesign voor de beide afnamen



Naar aanleiding van de verkennende analyses van de rekenoplossingen van de PPON-afname in 2003 is het design voor de LOVS-afname in 2004 enigszins aangepast om meer verschillen tussen de rekenhandelingen van de drie vaardigheidsgroepen te kunnen opsporen. Bij deze tweede afname maakten alle leerlingen twee extra opgaven om de overlap tussen de drie sets groter te maken. Twee opeenvolgende groepen konden hierdoor vijf in plaats van twee gemeenschappelijke opgaven maken en alle leerlingen konden opgave 6, 9 en 11 op hun eigen vaardigheidsniveau oplossen. In figuur 2.2 is de samenstelling van de sets in beide designs weergegeven.

De moeilijkheidsgraad van de ontworpen opgaven is achteraf vastgesteld, via de klassieke statistische analyse van de antwoorden die in de schriftelijke toetsen zijn geobserveerd. Op enkele uitzonderingen na, correspondeert de vastgestelde moeilijkheidsgraad vrij goed met de gemaakte schatting. Uitzonderingen zijn opgave 11, die uiteindelijk de gemakkelijkste opgave bleek te zijn, en opgave 1, die toch moeilijker bleek dan aanvankelijk ingeschat.

De vergelijking van de moeilijkheidsgraad van de drie oorspronkelijke sets met die van de aangepaste sets laat zien dat de gemiddelde moeilijkheid van de sets in beide onderzoeken oploopt: van $p = 0,78$ (set 1; Laag) naar $p = 0,69$ (set 2; Midden) en $p = 0,47$ (set 3; Hoog) in het eerste onderzoek en respectievelijk 0,76, 0,66 en 0,51 in het tweede onderzoek. Het streven om drie inhoudelijk aansluitende opgavenverzamelingen te maken in opklimmende moeilijkheidsgraad is dus geslaagd.

2.3 Onderzoeksgroep

Een belangrijke doelstelling van dit onderzoek is aanwijzingen te vinden voor de aard en de sterkte van de samenhang tussen het vaardigheidsniveau en de wijze van aftrekken. Hiertoe zijn drie groepen leerlingen gevormd die het hele vaardigheidsbereik van de onderzoekspopulatie dekken. De leerlingen werden geselecteerd door de leraren van de groepen die aan het onderzoek meededen. Iedere leraar selecteerde drie leerlingen: een leerling met een relatief hoog rekenvaardigheidsniveau, een leerling met een gemiddeld rekenvaardigheidsniveau en een met een laag vaardigheidsniveau, zie figuur 2.3.

Figuur 2.3 Criteria voor de selectie van deelnemende leerlingen medio jaargroep 5

Voor een leerling met	selecteert u
• een laag niveau	Een leerling op de grens van de niveaus E/D op de LVS-toets of een van de zwakkere rekenaars in de groep, niet noodzakelijk de zwakste.
• een gemiddeld niveau	Een leerling op de grens van niveaus B/C op de LVS-toets of met een gemiddeld rekenvaardigheidsniveau.
• een hoog niveau	Een leerling met niveau A op de LVS-toets of een van de goede/betere rekenaars in de groep, maar niet noodzakelijk de beste.

De drie sets opgaven zijn overeenkomstig hun geschatte moeilijkheidsgraad aan de drie groepen leerlingen voorgelegd. De vergelijking van de gemiddelde p-waarde van de set opgaven en de gemiddelde score van de leerlingen laat zien dat elke subgroep bij elke afname, globaal genomen, op zijn eigen niveau heeft gerekend. Dat is met name het geval tijdens de eerste afname en minder, zoals gewenst, bij de tweede, door de toevoeging van relatief gemakkelijke opgaven aan set 3, zie figuur 2.4.

Figuur 2.4 Toekenning van sets aan groepen

Subgroepen	Set	Eerste afname (7 opgaven)			Tweede afname (9 opgaven)		
		Aantal leerlingen	Gemiddelde p-waarde	Gemiddelde score	Aantal leerlingen	Gemiddelde p-waarde	Gemiddelde score
Laag	1	44	0,55	3,84	43	0,57	5,12
Midden	2	44	0,59	4,16	43	0,61	5,53
Hoog	3	44	0,62	4,36	47	0,71	6,38

2.4 Afname

Het onderzoek is uitgevoerd door vooraf geïnstrueerde toetsleiders. 's Ochtends namen zij in jaargroep 5 toetsen af in het kader van het peilingonderzoek PPON of de proefafname voor LVS. 's Middags vonden de individuele afnamen plaats bij de drie door de leraar geselecteerde leerlingen. De afname vond plaats aan de hand van een uitgebreide handleiding met instructies voor de toetsleider.

De leerling kreeg een boekje met opgaven overeenkomstig het ingeschatte vaardigheidsniveau. Elke pagina in het boekje bevatte één opgave met daaronder een vrije ruimte waar de leerling

aantekeningen kon maken tijdens het oplossen van de opgave. Het boekje bevatte daarnaast een voorbeeldopgave aan de hand waarvan de leerling werd geïnstrueerd. De toetsleider had een corresponderend boekje met voor iedere opgave een observatieformulier. Het observatieformulier bevatte voorbeelden van mogelijke oplossingsprocedures en een ruimte om aantekeningen te maken over de manier waarop de leerling de opgave oploste. Samengevat luidde de instructie aan de toetsleider:

- 1 Laat de leerling de opgave hardop voorlezen.
- 2 Controleer of de taal geen probleem vormt.
- 3 Laat de leerling de opgave hardop oplossen, eventueel met aantekeningen op papier.
Vraag indien nodig om een toelichting en noteer de oplossingsstrategie in het observatieboekje, maar voorkom iedere suggestie van een oplossingsstrategie die de leerling zou kunnen overnemen.
- 4 Laat de leerling het antwoord in het hokje schrijven of op de gegeven antwoordlijn.
- 5 Sluit af met een aanmoediging en/of een complimentje.

Het hardop oplossen van de opgaven en de eventuele reacties van de toetsleider zijn ook opgenomen op audiocassettes, voor nadere analyses van het oplossingsproces en ter controle op de onderzoeksprocedure.

2.5 Inventarisatie en codering

Problemen die leerlingen bij rekenen tot 100 ondervinden, kunnen worden begrepen door te onderzoeken welke strategieën en procedures ze gebruiken, hoe vaak de gemaakte berekeningen tot een correct antwoord leiden, welke (typen) fouten worden gemaakt en hoe de rekenhandeling, het succes en de gemaakte fouten met elkaar samenhangen. De informatie die de opgaven die door alle vaardigheidsgroepen zijn gemaakt opleveren, geeft dan indicaties over de aard en de sterkte van het verband tussen het vaardigheidsniveau en de mate van formalisering en flexibilisering van de geleerde hoofdrekenprocedures.

Hieronder wordt beschreven hoe de oplossingswijzen en de gemaakte fouten in dit perspectief zijn geïnventariseerd en gecodeerd.

Inventarisatie

Er zijn in totaal 2152 oplossingen geobserveerd. Deze oplossingswijzen zijn in drie database-bestanden opgeslagen: een voor de groep Laag, een voor de groep Midden en een voor de groep Hoog. Per opgave staan, op een apart veld (protocol), de aantekeningen die de betreffende toetsleider tijdens de afname op zijn/haar observatieformulier heeft vastgelegd. Elke keer dat deze aantekeningen bij de analyse vragen opriepen, werden de betreffende bandopname afgeluisterd en de aanpak en oplossing beschreven.

Codering van oplossingswijzen

De waargenomen oplossingswijzen zijn in een cyclisch proces van uitproberen en bijstellen gecodeerd. Het Leidse classificatiesysteem uit het onderzoek van Klein (1998) is hiertoe als uitgangspunt genomen. Dit systeem komt voort uit de steeds verdere verfijning van de oorspronkelijke indeling in drie standaardvormen van hoofdrekenen en twee varianten daarvan:

- de G10-methode die nu *Rijgen* wordt genoemd en de variant eG10;
- de 1010-methode die nu *Splitsen* wordt genoemd en de variant e1010;
- de combinatie 1010-G10 die nu *Combinatiemethode* of *semi-rijgen* wordt genoemd.

De code **G10** verwijst naar de sprong van **10** die de leerlingen vanaf het ongesplitste **G**etal maken. De **e** bij code **eG10** verwijst naar de **e**enheden die eerst worden verwerkt. 1010 geeft aan dat beide getallen in **tientallen** en eenheden worden gesplitst.

De categorieën van dit systeem (figuur 2.5) sluiten nauw aan bij de realistische aanpak en vormgeving van hoofdrekenen in de huidige rekenmethodes. Er wordt verschil gemaakt tussen twee vormen van hoofdrekenen: sequentieel rekenen aan de ene kant (rijgen) en rekenen via afsplitsen aan de andere kant (splitsen).

Figuur 2.5 Categorieënsysteem van de Leidse onderzoeksgroep (Klein, 1998)

Hoofdrekenmethoden		
	Sequentieel rijgen	Splitsen
Standaard	G10: eerst met 10-sprong $45 + 39$ via $45 + 30 = 75$; $75 + 5 = 80$; $80 + 4 = 84$ $65 - 49$ via $65 - 40 = 25$; $25 - 5 = 20$; $20 - 4 = 16$	1010 $45 + 39$ via $40 + 30 = 70$; $5 + 9 = 140$; $70 + 14 = 84$ $65 - 49$ via $60 - 40 = 20$; $5 - 9 = 4$ (foutief); samen 24
Variant	A10: eerst naar het dichtstbijzijnde tienvoud $45 + 39$ via $45 + 5 = 50$; $50 + 34 = 84$ $65 - 49$ via $65 - 5 = 60$; $60 - 40 = 20$; $20 - 4 = 16$	10t $45 + 39$ via $40 + 30 = 70$; $70 + 5 = 75$; $75 + 9 = 84$ $65 - 49$ via $60 - 40 = 20$; $20 + 5 = 25$; $25 - 9 = 16$
Handig rekenen	A10: aanvullend optellen in aftreksituaties $65 - 49$ via $49 + 1 = 50$; $50 + 10 = 60$; $60 + 5 = 65$ $\rightarrow 1 + 10 + 5 = 16$ Relatieboog: redeneren op basis van de inverse relatie tussen optellen en aftrekken $51 - 49 = 2$, want $49 + 2 = 51$ G10C: verder springen en compenseren $45 + 39$ via $45 + 40 = 85$; $85 - 1 = 84$ $65 - 49$ via $65 - 50 = 15$; $15 + 1 = 16$	

De twee oorspronkelijke vormen van splitsen zijn gehandhaafd. Dat zijn: de standaardprocedure 1010 en de variant e1010. Het rijgen wordt nader gedifferentieerd, op basis van (a) de aard van de gemaakte sprong bij de standaardvorm van rijgen en (b) het gebruik van handige getalrelaties. Dit categorieënsysteem was echter ontoereikend om alle in ons onderzoek geobserveerde oplossingen eenduidig en consistent te coderen en is daarom structureel aangepast. De genomen maatregelen worden hieronder achter elkaar verantwoord.

Onderscheid tussen 'rekenstrategie' en 'rekenprocedure'

In de loop van jaargroep 4 en 5 begrijpen leerlingen dat ze elk aftrekprobleem op drie verschillende manieren kunnen aanpakken en dat de ene oplossingswijze handiger is dan de andere, afhankelijk van de getallen. Zo kan opgave 6 op onderstaande manieren worden aangepakt en uitgerekend:

- Leerlingen volgen de weg die de tekst en de vraag van de opgave wijzen. Ze trekken dan af van 40 tot 24 om zo het verschil tussen € 40,- en € 24,- te kunnen bepalen. Het woord *goedkoper* in de vraag 'Hoeveel euro goedkoper?' lokt in die zin bij deze leerlingen de aftrekstrategie *aftrekken tot uit*.
- Veel leerlingen die weten dat ze de afstand tussen beide getallen in beide telrichtingen kunnen overbruggen en die liever optellen dan aftrekken, negeren juist de aandacht die op het laagste bedrag wordt gericht: ze vullen aan in plaats van terug te rekenen. Deze leerlingen gebruiken in die zin *optellen tot* als een alternatieve strategie voor *aftrekken tot*.

- Er zijn ook leerlingen die in deze situatie gewoon aftrekken, omdat ze weten dat elk aftrekprobleem aftrekkend kan worden uitgerekend en omdat de getallen in dit geval niet al te lastig zijn.

In het categorieënsysteem van Klein wordt de code A10 bij aftrekken in twee verschillende gevallen toegepast:

- 1 als de leerling in context of bij kaal rekenen via het dichtstbijzijnde tienvoud aftrekt én
- 2 in andere contextsituaties (of bij kaal aftrekken), als de leerling aanvullend optelt en naar het tienvoud springt, in plaats van af te trekken.

Om de rijgoplossingen eenduidig te kunnen coderen is in het onderhavige onderzoek besloten om onderscheid te maken tussen de gevolgde *rekenstrategie* en de gebruikte *rijgprocedure*, zoals aangegeven in figuur 2.6. Elke rijgoplossing krijgt hierdoor een dubbele codering:

- een codering voor de gevolgde strategie;
- een codering voor het gebruikte type rijgprocedure.

Figuur 2.6 Onderscheid tussen aftrekstrategieën en aftrekprocedures

Rijgprocedure	Aftrekstrategie / operatie		
	Aftrekken $40 - 24 =$	Overbruggen	
		Optellen tot $24 + ? = 40$	Aftrekken tot $40 - ? = 24$
G10	$40 - 10 = 30$; $30 - 6 = 24$; $10 + 6 = 16$	$24 + 10 = 34$; $34 + 6 = 40$; $10 + 6 = 16$	$40 - 10 = 30$; $30 - 6 = 24$; $10 + 6 = 16$
eG10	$40 - 4 = 36$; $36 - 20 = 16$		
A10		$24 + 6 = 30$; $30 + 10 = 40$; $6 + 10 = 16$	$40 - 6 = 34$; $34 - 10 = 24$; $6 + 10 = 16$

‘Afleiden’ als derde hoofdrekenmethode

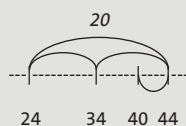
Sommige leerlingen lossen opgave 6 op door twee keer achter elkaar tien verder te springen ($24 \rightarrow 34, 44$) en vervolgens te compenseren: $20 - 4 = 16$. Ze vullen dus aan in plaats van af te trekken én veranderen bovendien de getallen.

Om onderscheid te kunnen maken tussen rijgen conform de getallen en handig rijgen, via overschrijden en compenseren, heeft de Leidse onderzoeksgroep de zogenoemde *G10C-procedure* in het leven geroepen. Deze categorie schept echter verwarring door de combinatie van ‘rijgen’ (G10) met variarekenen (C van Compenseren). Daarom is besloten om, naast rijgen en splitsen, een derde hoofdrekenmethode te onderscheiden: *afleiden*. Daarvan is compenseren één van de hoofdkenmerken.

De twee afgebeelde afleidoplossingen van opgave 6 (figuur 2.7) legitimeren onder andere deze beslissing. Leerling 2 leidt 16 uit dubbel 20 af zoals leerlingen uit jaargroep 7 en 8 uit dubbel 7 of dubbel 8 afleiden. De beredeneerde compensatie maakt het verschil met rijgen: de oorspronkelijke situatie moet worden hersteld door het ronde verschil van 20 met 4 te verlagen. De redenering van de derde leerling ondersteunt deze interpretatie.

Figuur 2.7 Van rijgend naar afleidend compenseren bij opgave 6

Leerling 1: rijgen



Leerling 2: structurerend afleiden

$24 + ? = 40$ via $20 + 20 = 40$; 24 is 4 meer dan 20, dan is het 16 + 20, dus 16

Leerling 3: idem, puur verbaal

Als het 20 was, was het 20. Maar het is 24. Die 4 komt er bij. Het is dus 16.

Met de categorie *afleiden* kan, concluderend, eenduidig en consistent verschil worden gemaakt tussen rekenen op lijn (rijgen), rekenen met tientallen en eenheden (splitsen) en redenerend rekenen. *Afleiden* geeft aan dat de leerling een uitkomst van een optelling of aftrekking via een andere optelling of aftrekking vindt, op basis van de relaties tussen operaties en met behulp van rekenregels.

Twee procedures die in het Leidse categorieënsysteem onder rijgen vallen, behoren in systeem in dit onderzoek tot *afleiden*: de G10C-procedure en de zogenoemde optelprocedure, ook Relatieboog genoemd. Dit is het afleiden van de uitkomst van een aftrekking uit de equivalente optelling ($51 - 49 = 2$ want $49 + 2 = 51$) (Treffers en Veltman, 1994; Tal-team, 1999; Menne, 2001).

Niveau van formalisering

De laatste aanpassing in het categorieënsysteem betreft de mengvorm splitsen-rijgen die in het Leidse categorieënsysteem met **10t** wordt aangeduid. Bij de beschrijving van het formaliseringsproces op basis van geobserveerde splitsberekeningen is gebleken dat deze mengvorm een tussenvorm van splitsen is die leerlingen tijdelijk, tussen twee rekenniveaus in gebruiken. Het sluit aan bij samengesteld optellen en aftrekken met tien en lossen en legt de basis voor optellen en aftrekken met tekorten. Daarom wordt de mengvorm splitsen-rijgen in dit onderzoek niet als een op zichzelf staande hoofdtekenprocedure beschouwd (zie hoofdstuk 10).

Aanvullende categorieën

Om alle oplossingen te kunnen coderen, wordt ten slotte ook gebruikgemaakt van de categorieën *Geheugenfeit* en *Rest*. Het etiket *Geheugenfeit* wordt geplakt op oplossingen waarbij de leerling de uitkomst vrijwel meteen geeft, op basis van de associatie van de getallen van de opgave met die van een bekend rekenfeit. Dit is het geval bij opgave 3, als de leerling direct 25 als antwoord geeft en zijn uitkomst met dubbel 25 is 50 verantwoordt.

Onder *Rest* vallen ten slotte alle procedures die, om een van onderstaande vier redenen, het etiket *Rijgen*, *Splitsen*, *Afleiden* of *Geheugenfeit* niet krijgen:

- de oplossing en uitkomst zijn beïnvloed door de toetsleider (sturing).
- de leerling heeft het probleem onjuist geïnterpreteerd en voert hierdoor geen adequate rekenhandelingen uit (onjuiste schematisering).
- de leerling weet niet hoe hij de opgave kan aanpakken of loopt ergens vast: bij de schematisering van het probleem, de bewerkingen van de getallen, de interpretatie van de gemaakte rekenstappen en/of gevonden uitkomst of een combinatie van deze factoren (ontoereikend begrip).
- het is niet mogelijk om, op basis van wat de leerling zegt en doet vast te stellen hoe hij rekt en de uitkomst heeft gevonden (anders).

Vier dimensies

Uiteindelijk zijn alle oplossingen langs vier dimensies gecodeerd, zoals de voorbeeldoplossingen van opgave 6, aan het einde van dit hoofdstuk dat illustreren:

- de dimensie *Rekenstrategie* (D1) duidt de aanpak van het probleem of de kale opgave aan (optellen, aftrekken, optellen tot of aftrekken tot);
- de dimensie *Hoofdrekenmethode* (D2) duidt de methode aan die de leerling gebruikt (rijgen, splitsen, afleiden, geheugenfeit);
- de dimensie *Rekenprocedure* (D3) duidt de toegepaste rijg-, splits- en afleidhandelingen aan;
- de dimensie *Niveau* (D4) duidt het niveau van formalisering van deze rekenhandelingen aan.

Foutencategorieën

De analyse van de fouten die leerlingen maken, kan indicaties geven voor verklaringen van hun problemen bij de schematisering van de optel- of aftreksituatie, bij de bewerking van de getallen, bij de interpretatie van de uitgevoerde handelingen en/of de (tussen)uitkomsten van de bewerkingen, en combinatie van deze handelingen. De in dit onderzoek gebruikte foutencategorieën zijn al analyserend ontstaan. We zijn daarbij uitgegaan van drie typen fouten:

- fouten die voortkomen uit een tijdelijke of structurele misconceptie van (a) de getallen en/of (b) de gevolgde strategie en/of toegepaste procedure (categorie '*Begrip*');
- fouten die voortkomen uit de gebrekkige automatisering van voorwaardelijke kennis en vaardigheden (categorie '*Procedurele vaardigheden*');
- fouten die de leerling maakt omdat hij de greep op zijn rekenhandelingen verliest (categorie '*Proces*').

Figuur 2.8 geeft een overzicht van de in dit onderzoek gebruikte foutencategorieën.

Figuur 2.8 Foutencategorieën voor de analyse van fouten die leerlingen bij hoofdrekenen maken

Rekenschema	Type fouten met betrekking tot					
	Begrip		Procedurele vaardigheden		Proces	
	Getallen	Procedure	Telfout	Basisoperatie	Verlies van overzicht	Slordigheidsfout

Voorbeeldoplossingen van voorbeeldopgave 6

Rijgen			
Rijgprocedure	Strategie		
	Aftrekken $40 - 24 =$	Optellen tot $24 + ? = 40$	Aftrekken tot $40 - ? = 24$
Twee keer tellen		24 40 1 2 3 4 (...) 16	
G10 10-sprong	40 eraf 10 is 30, eraf 10 is 20, eraf 4 is 16 Eigen notatie in sommentaal: $40 - 24 =$ $40 - 20 = 20 - 4 = 16$	$24 + 10 = 34$; $34 + 6 = 40$; $10 + 6 = 16$ Van 40 naar 24	$40 - 10 = 30$; $30 - 6 = 24$; $10 + 6 = 16$
A10 Sprong naar tienvoud		26! Nee, verkeerd! 16! $24 + 6 = 30$; $30 + 10 = 40$; $6 + 10 = 16$	
eG10 Eerst de eenheden bewerken	$40 - 4 = 36$; $36 - 20 = 16$		$40 - 6 = 34$; $34 - 10 = 24$; $6 + 10 = 16$

Splitsen		
Splitsprocedure	Strategie	
	Aftrekken $40 - 24 =$	Optellen tot $24 + ? = 40$
1010 Eerst de tientallen bewerken, dan de eenheden	Met tekst $40 - 20 = 20$; $0 - 4$ kan niet; $20 - 4 = 16$ Foutieve omkering Eerst haal ik er 20 af is 20 0 min 4, dat blijft 4, dan wordt het 24	$20 + 10 = 30$ $4 + 6 = 10$ $10 + 6 = 16$
e1010 Eerst de eenheden bewerken		$4 + 6 = 10$; $20 + 10 = 30$; dus 16

Afleiden

Splitsprocedure	Strategie	
Afsplitsen en compenseren	Met optelrelaties Correct: 16 • $24 + 20 = 44$; 4 te ver, dus 16 • $20 + 20 = 40$ en dan ... min 4 ... 16 • Dit is 24 en dit is 40. Als het 20 was, was het 20 maar nu is het 16, want de 4 komt er ook bij	Met aftrekrelaties Foutief: 24 euro • Ik weet het! $40 - 20 = 20$, dus 24 euro goedkoper $40 - 20 = 20$; $20 + 4 = 24$
	Foutief: 24 euro • Dat is 20 euro goedkoper: $20 + 20 = 40$; bij 40 moet ik er dan 20 aftrekken is 24 Foutief: 26 euro • Je weet dat $2 + 2 = 4$, en $20 + 20 = 40$. Dan doe je 20 eraf en dan 6	
Reconstrueren	Foutief: 40 $20 + 20 = 40$; $4 + 6 = 10$	

Restoplossingen

De leerling schrijft het antwoord op (26) en licht toe: eerst heb ik er 20 afgedaan ($40 - 20 = 20$) en toen heb ik van 29 naar 24 geteld en toen kwam ik op 26 uit.

De leerling schrijft in zijn boekje:

$$20 + 20 = 40 - 4; 10 + 4 = 14$$

Hij komt uiteindelijk op $40 - 24$ en komt tot 18.

Over de algemene trend

- 3 **Rijgen: de meest gebruikte en meest effectieve hoofdrekenmethode**
- 4 **Flexibel rekenen op basis van rijgen, splitsen en redeneren vooralsnog niet effectief**
- 5 **Meer rijgers in de top van de populatie**
- 6 **Mengvormen splitsen-rijgen vaak gebruikt bij kaal rekenen**

3 Rijen: de meest gebruikte en meest effectieve hoofdrekenmethode

‘Meer hoofdrekenen, minder cijferen.’ Zo luidde de titel van het openingsartikel van Sjoerd Huitema in het septembernummer van Willem Bartjens in 1991, kort nadat flexibel hoofdrekenen in het kerndoel basisvaardigheden was opgenomen. Het advies heeft gehoor gekregen. Vijftien jaar na dato rekenen leerlingen uit jaargroep 5 vrijwel altijd met het hoofd, en het vaakst doen ze dat rijgend. Splitsen, dat het meest op cijferen lijkt, wordt in hooguit 20% van de oplossingen gebruikt, terwijl het cijferalgoritme in slechts 7 van de 2152 geobserveerde berekeningen is toegepast. In één op de tien oplossingen leidt de leerling af. Alles wijst erop dat rijgen loont en dat splitsen en vooral redeneren onvoldoende worden beheerst.

3.1 Inhoud

In dit hoofdstuk wordt gerapporteerd hoe vaak leerlingen uit jaargroep 5 de geleerde hoofdrekenmethoden gebruiken bij het oplossen van contextproblemen en uitrekenen van kale operaties, en hoe succesvol ze dat doen. De tussendoelen, de gebruikte onderwijsmethoden en het huidige aanbod van de leraren worden hierbij als bepalende onderwijscondities beschouwd.

3.2 Beïnvloedende factoren

In de Nederlandse onderwijssituatie beïnvloeden de tussendoelen die de auteurs van de onderwijsmethoden als referentie nemen en het aanbod van de leraar het geobserveerde rekengedrag van de leerling. We lichten deze factoren kort toe.

Tussendoelen

Halverwege de basisschool zijn de meest complexe vormen van optellen en aftrekken tot 100 al aan de orde geweest. Uitgaande van het tussendoel dat voor eind jaargroep 4 is geformuleerd, moeten alle leerlingen dan in staat zijn alle opgaven, zowel kaal als in toepassingen, uit te rekenen. Ze kunnen daarbij gebruikmaken van de getallenlijn, de tussenstappen in sommentaal noteren of helemaal uit het hoofd rekenen. Eind jaargroep 5 moeten ze vlot en inzichtelijk uit het hoofd kunnen rekenen, desgewenst gebruikmakend van tussennotaties. Het Tal-team (1999) adviseert om hoofdrekenen tot 1000 halverwege de basisschool te introduceren. Leerlingen leren dan optellingen en aftrekkingen met getallen groter dan 100 rijgend op te lossen, al dan niet ondersteund met de lege getallenlijn. Ze leren daarnaast ook splitsen (bijvoorbeeld in geldcontexten) en variarekenen (bijvoorbeeld aanvullend optellen en afronden/compenseren).

Onderwijsaanbod

De leraren uit de jaargroepen 3, 4 en 5 van de deelnemende scholen hebben via de aanbod-vragenlijst aangegeven welke leermiddelen ze gebruiken, hoeveel tijd ze aan rekenen-wiskunde besteden, hoe ze hun onderwijs differentiëren en wanneer de meer algoritmische vormen van rekenen (kolomsgewijs rekenen en cijferen) worden geïntroduceerd. De aanbodinventarisatie geeft de volgende voor dit onderzoek relevante informatie.

Gebruikte onderwijsmethode

Vrijwel alle scholen gebruiken rekenboeken waarin de nieuwe aanpak van rekenen tot 100 wordt gevolgd. Meer dan 90% van de leraren zegt de aanwijzingen van de methode geheel te volgen. Andere leraren geven aan dat zij hun methode in belangrijke mate volgen maar ook elementen weglaten, zonder dit overigens nader te specificeren.

Introductie van kolomsgewijs rekenen en cijferen

Er zijn nauwelijks leraren die in jaargroep 4 het algoritmisch rekenen aan de orde stellen. Kolomsgewijs optellen en vervolgens aftrekken wordt in de regel in de tweede helft van jaargroep 5 geïntroduceerd en de cijferalgoritmen meer in jaargroep 6. Een opvallend gegeven is dat bijna de helft van de leraren van jaargroep 4 zegt niet te weten wat later in het onderwijs aan de orde komt, dat wil zeggen, welke manier van rekenen in de bovenbouw wordt aangeleerd.

Differentiatie

De meeste leraren passen in alle drie de jaargroepen een lichte vorm van differentiatie toe. Ze volgen in de regel de aanwijzingen van de methode en gebruiken aanvullende leermiddelen om de oefen- en verwerkingsactiviteiten af te stemmen op de verschillen die de voortgangstoetsen en diagnostische gesprekken signaleren.

Er wordt vooral in de klas gedifferentieerd. De helft van de leraren uit jaargroep 5 stuurt gemiddeld drie leerlingen naar de remedial teacher. 70% van de leraren treft speciale voorzieningen in zijn klas voor de meerbegaafden. Bij uitzondering verwerken leerlingen versneld of in eigen tempo programmaonderdelen van de methode.

Uitgaande van het vernieuwingskader dat in hoofdstuk 1 is gepresenteerd, kan worden gesteld dat leraren hun rekenonderwijs in de lijn van die vernieuwing uitvoeren. Ze leggen in jaargroep 4 de nadruk op rijgen, zoals hun rekenmethoden dat adviseren, formaliseren pas de splits-procedures in de tweede helft van jaargroep 5 in de richting van het kolomsgewijs rekenen en stellen het cijferend optellen en aftrekken uit tot jaargroep 6. Er wordt ten slotte binnen de marges van de leergang gedifferentieerd.

3.3 Onderzoeksvragen

De oplossingswijzen van de leerlingen zijn vanuit de twee onderstaande vragen geanalyseerd.

- 1 Hoe vaak gebruiken leerlingen uit jaargroep 5 rijgen, splitsen, redeneren, restoplossingen, geheugenfeiten bij het oplossen van een reeks optel- en aftrekopgaven die binnen hun vaardigheidsbereik liggen?
- 2 Hoe succesvol worden deze hoofdrekenmethoden toegepast?

3.4 Analyse

De onderzoeksvragen worden op basis van de 2152 geobserveerde oplossingen beantwoord. Op dit analyseniveau wordt geen verschil gemaakt tussen optellen en aftrekken. Omdat elke vaardigheidsgroep een eigen set opgaven heeft gemaakt, zijn alle oplossingen per vaardigheidsniveau gesorteerd en geteld. Daarbij is uitgegaan van de vijf hoofdrekenmethoden, respectievelijk Rijgen, Splitsen, Redeneren, Geheugenfeit en Restoplossingen (zie *Inventarisatie en codering* in hoofdstuk 2).

Het succes dat elke vaardigheidsgroep met elke hoofdrekenmethode behaalt, is berekend op basis van het totale aantal correcte antwoorden van alle gemaakte optel- en aftrekopgaven.

3.5 Resultaten

Gebruiksfrequentie van hoofdrekenmethoden

Uit de resultaten van de analyse komen vier aanwijzingen naar voren:

- 1 Rijgen is de meest gebruikte hoofdrekenmethode.
- 2 Splitsen en redeneren worden veel minder vaak gebruikt dan rijgen; redeneren het minst van alle drie.
- 3 Het zijn vrijwel uitsluitend leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep die de gegevens van sommige opgaven direct met het passende rekenfeit (geheugenfeit) associëren.
- 4 Laatstgenoemde groep genereert ook relatief veel restoplossingen.

1 Rijgen. In alle drie de vaardigheidsgroepen wordt meer dan de helft van de opgaven rijgend opgelost. In de groep Hoog worden zelfs twee op de drie opgaven op deze manier opgelost.

2 Splitsen en redeneren. Er wordt heel weinig gesplitst. Deze methode wordt in slechts 10% van de oplossingen van de groep Laag gebruikt en in ongeveer 20% van de oplossingen van de groepen Midden en Hoog.

Redeneren wordt nog minder toegepast. Het gebruikspercentage is niet hoger dan 10%.

3 Geheugenfeiten. In 6% van de oplossingen van de groep Laag associeert de leerling direct de relatie tussen de drie getallen van de opgave met een bekend rekenfeit. In de twee overige groepen wordt een rekenfeit in slechts één op de honderd oplossingen op deze manier gebruikt.

4 Restoplossingen. Ongeveer één op de vijf oplossingen van de groep Laag is in de categorie Rest ondergebracht tegen één op de tien in de groep Midden en één op de twintig in de groep Hoog.

Figuur 3.1 Percentage oplossingen en correcte antwoorden per hoofdrekenmethode

Groep	Rijgen		Splitsen		Redeneren		Geheugenfeit		Rest		Totaal aantal oplossingen
	Freq.	goed	Freq.	goed	Freq.	goed	Freq.	goed	Freq.	goed	
Laag	56%	79%	10%	68%	10%	46%	6%	98%	18%	13%	705
Midden	59%	87%	20%	65%	10%	56%	1%	86%	9%	17%	716
Hoog	67%	91%	18%	68%	8%	68%	1%	100%	5%	16%	731
Totaal aantal oplossingen	1315		344		203		60		230		2152

Succes

Leerlingen uit jaargroep 5 zijn in alle drie de vaardigheidsgroepen het meest succesvol als ze rijgen. Het percentage correcte antwoorden bedraagt ongeveer 80% in de groep Laag en loopt op tot 90% in de hoogste vaardigheidsgroep.

Het succes dat bij splitsen wordt behaald, schommelt rond de 65%.

Leerlingen zijn het minst succesvol als ze redeneren. Het percentage correcte antwoorden varieert dan tussen 46% (groep Laag) en 68% (groep Hoog).

Dit relatief lage percentage staat in schril contrast tot het bijna 100% succes dat leerlingen uit de laagste en de hoogste vaardigheidsgroep behalen, als zij de getallen van de opgave met een geheugenfeit associëren.

Het percentage correcte antwoorden in de restoplossingen is laag te noemen. Het varieert tussen 13% en 17%. Dit betekent dat leerlingen die het probleem in gedachten correct schematiseren, maar vervolgens niet goed kunnen uitleggen hoe ze denken en rekenen, vaak een foutieve uitkomst vinden.

3.6 Aandachtspunten

Bovenstaande aanwijzingen richten de aandacht op drie kwesties:

- Leerlingen uit jaargroep 5 rekenen nu *anders* dan voor de vernieuwing van het rekenonderwijs.
- Rijgen loont.
- Flexibel rekenen op basis van rijgen, splitsen en redeneren lijkt problematisch.

Leerlingen rekenen anders dan voor de vernieuwing

In de tweede helft van de jaren tachtig schaften steeds meer scholen een zogenoemde realistische rekenmethode aan. Als gevolg daarvan leerden de leerlingen anders te rekenen. In scholen waar traditionele rekenmethoden werden gebruikt, werd er vooral gesplitst en weinig geregen (60% tegen 30%). De verhouding lag omgekeerd in scholen die een rekenmethode gebruikten waar leerlingen eerst met het zogenoemde honderdveld leerden rijgen (Beishuizen, 1986).

Begin jaren negentig hanteerden zwakke rekenaars uit de reguliere basisscholen en uit het speciaal onderwijs vaker de strategie van het splitsen dan hun klasgenoten die goed konden rekenen (Van der Heijden, 1993; Harskamp en Suhre, 1995). Een op de twee zwakke leerlingen van de basisschool kon als 'splitser' worden aangemerkt. Deze leerlingen maakten regelmatig zowel begripsfouten als rekenfouten (Van Mulken, 1992; Willemsen en Harskamp, 1990).

Spontaan, handig rekenen kwam eind jaren tachtig weinig voor. Het waren vooral 'slimme' leerlingen die handig rekenden (Van der Heijden en Beishuizen, 1986).

De geobserveerde oplossingen uit ons onderzoek maken drie veranderingen in het rekengedrag van de leerlingen zichtbaar:

- Splitsen wordt in hooguit 20% van de oplossingen gebruikt. Onder deze categorie vallen ook de zeven geobserveerde oplossingen waarin een of andere vorm van cijferen wordt toegepast: één in de groep Laag, één in de groep Midden en vijf in de groep Hoog.
- Leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep splitsen veel minder dan voorheen. Ze lijken ook meer inzichtelijk en succesvoller te splitsen dan vroeger.
- Leerlingen met een lage vaardigheid durven bovendien in één op de tien oplossingen te redeneren op basis van relaties tussen operaties waarbij ze gebruikmaken van reken-eigenschappen.

Dit alles wijst erop dat de leerlingen uit jaargroep 5 conform het aanbod rekenen: bij voorkeur met behulp van rijgprocedures, maar ook regelmatig met splitsprocedures en soms ook via

De waargenomen verschillen in het gebruik van redeneren tussen de groepen Laag, Midden en Hoog worden vrijwel zeker veroorzaakt door de getallen in de opgaven. In de set opgaven die de groep Laag heeft gemaakt, zijn vaker dan in de twee andere sets getalrelaties gecontextualiseerd die een groot aantal vijfdegroepers al uit het hoofd kent. Dit geldt bijvoorbeeld voor de opgave $50 - 25$, die veel leerlingen direct met dubbel 25 associëren. De groep die $100 - 86$ direct met 14 associeert, daarbij denkend aan de splitsing van 100 in 86 en 14, is daarentegen veel kleiner.

De resultaten van alle drie de vaardigheidsgroepen tonen aan dat rijgen loont. Het percentage correcte antwoorden is bij rijgen het hoogst (afgezien de hoge scores bij het gebruik van geheugenfeiten). Het lijkt erop dat rijgen nu aan iedereen het vertrouwen geeft dat cijfers vroeger aan goede rekenaars gaf.

Verrassend is de aanwijzing dat leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep heel vaak rijgen en met uitzonderlijk goede resultaten, terwijl de voorgelegde opgaven nog niet zijn behandeld. Dit betekent dat deze leerlingen, op eigen kracht, de rijgprocedures die ze voor de bewerking van getallen kleiner dan 100 hebben geleerd toe weten te passen op de bewerking van getallen tot 1000 (en zelfs daarboven). Dit laat zien dat rijgen ook in het getalgebied tot 1000 functioneel kan zijn, als de leerlingen adequate strategieën en procedures toepassen (zie Deel 3 *Over rijgend aftrekken*).

De nadruk op rijgen en het gebruik van splitsen en variarekenen in combinatie met rijgen waren twee twistpunten in het debat tussen de experts. Het aantal fouten dat bij splitsen en redeneren wordt gemaakt, doet vermoeden dat leerlingen uit jaargroep 5 deze beide methoden onvoldoende beheersen om ze succesvol met rijgen te combineren. Op dit onderwerp gaan we in het volgende hoofdstuk nader in.

Rijgen [25 + ? = 50] Kort en krachtig 25 + 20 = 45 45 + 5 = 50 20 + 5 = 25 Via het tienvoud 25 + 5 = 30 30 + 20 = 50 20 + 5 = 25 Telfout Overbruggen met 15 telstappen van één, gesymboliseerd met streepjes 25 50	Redeneren [25 + ? = 50] Samen nemen van twee getalrelaties 25! 20 + 20 = 40 5 + 5 = 10 Dat (25 + 25) is samen 50 Redeneren uit een rekenfeit met compensatie 25 + 30=55 55 – 5= 50 Dus 25	Geheugenfeit 25! Ik weet dat 25 + 25 = 50	Rest Geen oplossing Ze kijkt omhoog, doet veel in haar hoofd, maar zegt niets. (...). Ik laat het haar opnieuw lezen. We gaan naar de volgende vraag. Gok 25! Oh, ik deed een gokje. Ik zei zomaar wat. Verkeerde schematisering Die snap ik niet. Ze leest nog eens en rekent: 50 + 25 = 50 50 + 20 = 70 + 5 = 75
--	--	--	--

Geobserveerde oplossingen van opgave 7

Rijen	Splitsen	Redeneren	Rest
Met dubbele telling 35 → 36(1), 37(2), 38(3) tot 45(10). Nog 9 bijtellen. Telt weer vanaf 35 en stopt met tellen bij 54 (foutief) Eerst een 10-sprong 35 + 10 = 45 45 + 9 = 54 Via het dichtstbijzijnde tienvoud 35 + 5 = 40 40 + 10 = 50 50 + 4 = 54 Eerst de eenheden 35 + 9 = 44 44 + 10 = 54	In combinatie met rijen • 30 + 10 = 40; 40 + 9 = 49 49 + 5 via 50 + 4 = 54 • 30 + 10 = 40; 40 + 9 = 49 • 49 + 5 via 50 (1), 51 (2), 53 (3) ... 54 (9) Informeel inwisselen 30 + 10 = 40 5 + 9 via 5 + 5 = 10 en 10 + 4 = 14 40 + 14 via (40 + 10) + 4 = 54 Kolomsgewijs 30 + 10 = 40 5 + 9 = 14 40 + 14 = 54 Eerst de eenheden 5 + 9 = 14 30 + 10 = 40 40 + 14 = 54	Transformeren • 35 + 19 is evenveel als 30 + 20 + 4 • 35 + 19 is evenveel als 35 + (5 + 14) = 40 + 14 • 35 + 19 is evenveel als 35 + 20 en 1 eraf	Misinterpretatie: aftrekken in plaats van optellen 9 en 5 even weg van 30 tien eraf is 20. Nog 9 eraf is 11 Anders Eentje kost 35 euro en eentje 19 euro, dus eerst 19 + 20 = 29 en dan doe ik er weer 7 bij is 35. Dan doe ik er in totaal 49, nee ik bedoel 27 bij en dat is dan 35. Antwoord 27 Teveel sturing Juf: Wat is de som? Leerling: De som is 19 + 35 Juf: 19 + 35, schrijf maar op. Nou ... hoe ga je dat doen? Leerling: Eerst uh ... 11 bij. Je doet er eerst 11 bij? Juf: Waar bij? Leerling: uh ... bij de 19 Juf: 19 erbij 11, ... Leerling: dat is 30 euro; 30 erbij 5 is 35 ... dat is het antwoord. stilte ... Juf: Wat staat er daar? Leerling: 35 euro Juf wijst naar de vraag en zegt: hoeveel kosten de boeken samen? Oh ... ja!!!

Geobserveerde oplossingen van opgave 12

Rijgen	Splitsen	Redeneren	Rest
[48 + ? = 62] Via het tienvoud $48 + 2 = 50$ $50 + 12 = 62$ $48 + 10 = 58$ $58 + 4 = 62$ $10 + 4 = 14$	[48 + ? = 62] Aanvullend splitsen $40 + 10 = 50$ $8 + 4 = 12$ Samen 14	[48 + ? = 62] Redeneren uit een rekenfeit met compensatie $48 + 20 = 68$ 6 teveel dus 6 eraf is 14	Teveel sturing $6 - 4 = 2$, eigenlijk 20 $2 - 8$ kan niet, dan moet je 8 van de 20 afhalen. Ze rekent nu met de vingers (...) 13? Ze twijfelt. Dan te veel hulp.
[62 - 48 = ?] Kort en krachtig $62 - 40 = 22$ $22 - 2 = 20$ $20 - 6 = 14$	[62 - 48 = ?] In combinatie met rijgen $60 - 40 = 20$ $20 + 2 = 22$ $22 - 8 = 20 - 6 = 14$	[62 - 48] Transformeren (principe van het gelijk blijvend verschil) $62 - 48$ is evenveel als $60 - 46$, 14	Anders $40 - 60 = 20$ (bedoelt $60 - 40 = 20$) $6 - 60 = 54$ (bedoelt $60 - 6 = 54$)
Met telstappen van 1 $62 - 40 = 22$ $22 - 8$ via 21 (1), 20 (2), 19 (3) ... tot 14 (8)	Met tekort $60 - 40 = 20$ $2 - 8$ kan niet, 6 tekort $20 - 6 = 14$		
Met sprongen van 10 $62 \rightarrow 52, 42, 32, 22$ $22 - 8$ via $22 - 2 = 20$ en $20 - 6 = 14$	Met informeel inwisselen $60 - 40 = 20$ $2 - 8$ kan niet maar ik kan $12 - 8$ uitrekenen. Dat is 4. Dan gaat één 10 van 20 weg. $10 + 4 = 14$		
Eerst de eenheden aftrekken $62 - 4 = 58$ $58 - 10 = 48$	Foutieve omkering $60 - 40 = 20$; $2 - 8$ kan niet; $8 - 2 = 6$; $20 + 6 = 26$		

4 Flexibel rekenen op basis van rijgen, splitsen en redeneren vooralsnog niet effectief

Veel leerlingen wisselen van rekenmethode bij het oplossen van de optel- en aftrekopgaven. Sommigen combineren rijgen met splitsen, anderen wisselen rijgen met splitsen én redeneren of geheugenfeiten af. En er zijn leerlingen die alle vier hoofdrekenmethoden gebruiken. Alles wijst erop dat flexibel hoofdrekenen op basis van rijgen, splitsen en redeneren vooralsnog niet loont, omdat te veel leerlingen het splitsen en redeneren onvoldoende beheersen.

4.1 Inhoud

In dit hoofdstuk rapporteren we op welke wijze en hoe succesvol leerlingen flexibel hoofdrekenen door afwisselend gebruik te maken van rijgen, splitsen, redeneren en geheugenfeiten. Deze vorm van flexibel rekenen was, zoals gezegd in hoofdstuk 1, een van de twistpunten in het debat tussen de experts bij het vaststellen van de communale doelen voor rekenen-wiskunde. Het kernargument om het ‘driespan’ *rijgen-splitsen-variarekenen* in te voeren was, dat deze drie hoofdrekenmethoden afzonderlijk hun voors en tegens hebben. Door ze strategisch te gebruiken, zou de leerling van elke methode de voordelen kunnen uitbuiten. De resultaten van de eerste analyse van de oplossingen doen sterk twifelen aan de effectiviteit van deze vorm van flexibel rekenen door het relatief lage succes dat met splitsen en redeneren wordt behaald.

4.2 Beïnvloedende factoren

Het onderwijsaanbod, het vaardigheidsniveau én de kenmerken van de opgaven kunnen leerlingen die tot 100 rekenen er meer of minder toe bewegen de hoofdrekenmethoden die ze hebben geleerd strategisch te gebruiken. Dit blijkt uit de Leidse onderzoeken die in dit rapport als referenties zijn genomen (onder ander Beishuizen, 1983; 1985; Van der Heijden en Beishuizen, 1986; Van der Heijden, 1993; Klein, 1998).

Aanbod

Gelet op het aanbod (zie hoofdstuk 3), hebben alle leerlingen van de steekproef zeer waarschijnlijk de drie de vormen van hoofdrekenen geleerd, met de nadruk op rijgen. Ze kunnen dan ook in principe doelgericht van methode wisselen, afhankelijk van de kenmerken van de opgaven.

Vaardigheidsniveau van de leerlingen

Alle beschikbare onderzoeksgegevens wijzen erop dat minder vaardige leerlingen minder geneigd zijn om hun rekenhandelingen af te stemmen op relevante kenmerken van de opgaven, maar dat ze dat wel degelijk kunnen leren (zie *Flexibel hoofdrekenen* in hoofdstuk 1). De vraag is in hoeverre

leerlingen, halverwege de basisschool, voldoende zijn gevorderd in het domein van getallen en bewerkingen om strategisch gebruik te kunnen maken van rijgen, splitsen, redeneren en geheugenfeiten. De stand van zaken, zoals beschreven in de balans van de vierde reken peiling (Kraemer e.a., 2005), geeft hier concrete aanwijzingen over. Die zijn in het overzicht van figuur 4.1 geïnventariseerd.

Figuur 4.1 Relevante voortgangsgegevens halverwege de basisschool

Onderwerpen	Stand van zaken
Getal en getal-relaties tot 100 (1000)	Slechts een kwart van de leerlingpopulatie is vertrouwd met de getallen tot 100 zoals bedoeld en is in staat om het verworven begrip en de vaardigheden ook in elementaire probleemsituaties toe te passen. Een grote groep leerlingen lijkt meer formeel-instrumenteel met getallen aan de slag te gaan en minder vanuit de betekenis van getallen en handelingen in alledaagse situaties. Dit zou kunnen verklaren waarom ze bijvoorbeeld 40, 500 en 7 correct samennemen, maar niet vast kunnen stellen dat je 8 biljetten van 100 euro nodig hebt om een fiets van € 799,- te betalen. Het ruimtelijk ordenen van getallen op de honderdlijn levert aanzienlijk meer problemen op dan het meer formeel instrumenteel ordenen via de splitsing in tientallen en eenheden. Vermoedelijk zien veel leerlingen het verband niet tussen de onderlinge positie van de getallen in de telrij (telaspect) en de wijze waarop ze met tientallen en eenheden zijn samengesteld (hoeveelheidsaspect). Het merendeel van de leerlingen geeft de indruk niet echt te begrijpen volgens welke systematiek de getallenwereld tot 100 wordt vergroot tot de wereld van getallen tot 1000.
Basisautomatismen: Optellen en aftrekken onder 20	Leerlingen die boven het niveau van de percentiel-70 leerling presteren beheersen de getoetste basisautomatismen tot 100. De middengroep beheerst het merendeel van de getoetste opgaven waaronder opgaven van het type $60 - 35$, $80 - 43$, $54 - 30$ en $62 - 40$. 10% van de minst gevorderde leerlingen ondervindt nog problemen bij aftrekkingen in het getalgebied tot 20 die via een of andere vorm van handig rekenen kunnen worden opgelost. Hun groepsgenoten die verder zijn gevorderd beheersen al matig opgaven als $79 - 5$, $45 + 9$, $45 + 55$ en $60 - 35$.
Bewerkingen: Optellen en aftrekken tot 100 (1000)	Het gros van de leerlingen beheerst de opgaven die met de meest elementaire rijg- en splitsprocedures kunnen worden uitgerekend of via de combinatie splitsen-rijgen. De minst gevorderde leerlingen ondervinden moeilijkheden bij rijgen, als zij over een langere afstand met stappen van één rekenen en over meer dan twee intervallen van de telrij moeten springen. Problemen ontstaan ook, als de leerling meer dan 9 eenheden krijgt bij optellen ($12 + 24 + 36$) en te weinig eenheden heeft om af te trekken ($76 - 48$). Aftrekkingen als $72 - 58$ vormen nog steeds de kroon op het rekenen tot honderd. Alleen de meest vaardige leerlingen kunnen dergelijke opgaven foutloos uitrekenen. Leerlingen uit de middengroep kunnen al aardig met getallen groter dan 100 optellen en aftrekken. Ze beheersen opgaven als $675 - 40$, $425 + 150$ en $175 + 125$ en kunnen 'verschilopgaven' met getallencombinaties als $465 \# 300$ en $360 \# 250$ vrijwel foutloos uitrekenen. In hun zone van naaste ontwikkeling liggen opgaven met bewerkingen als $175 + 375$ en $620 - 370$, die de meest vaardige leerlingen dan al met ruim 60% kans op succes oplossen. Zeer opvallend is de enorme afstand tussen de minst en de meest vaardige leerlingen. De percentiel-90 leerling kan een complex probleem als het stemmen in Maasbroek (opgave 14) al correct oplossen, terwijl zijn tegenvoeters nog foutief splitsen bij het uitrekenen van $36 - 25$ (opgave 5).

Bron: Kraemer e.a., 2005, p. 43 – 90

Getallen en getalrelaties

De stand van zaken met betrekking tot 'getallen en getalrelaties' doet vermoeden dat een groot deel van de leerlingen de getallen tot 100 nog onvoldoende heeft gestructureerd en aan elkaar gekoppeld om handig gebruik te kunnen maken van hun eigenschappen en onderlinge relaties bij optellen en aftrekken. Dit wordt bevestigd door de informatie die de rekendictees van de rekenpeiling van 2005 geven. De voorgelegde opgaven zijn in dit geval gebaseerd op de analyse van de getalstructuren en -relaties die de leerlingen nodig hebben om de optel- en aftrek-opgaven van de toets hoofdrekenend rijgend, splitsend of redenerend te kunnen oplossen (zie het schema op pagina 57 in Kraemer e.a., 2005). De 21 voorbeeldopgaven van deze dictees die in figuur 4.2 staan, laten twee zaken zien:

- Het gros van de leerlingen lijkt over de getalstructuren en -relaties te beschikken die nodig zijn om op een elementair niveau te kunnen rijgen, splitsen en redeneren:
 - $84 - 40 = 44$ en $48 + 40 = 88$, want $2 \times 40 = 80$;
 - $56 - 50$ moet 6 zijn, want $56 = 50 + 6$ en $45 + 9$ moet 54 zijn, want $45 + 10 = 55$;
 - $27 + 50 = 77$, want $50 + 20 = 70$.
- De moeilijkheidsgraad van voorbeeldopgaven 12 tot en met 21 duidt erop dat het netwerk van getalrelaties van leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep nog ontoereikend is om de hoofdrekenprocedures te verkorten en/of puur op basis van getalrelaties en met behulp van rekeneigenschappen te leren hoofdrekenen, zoals in deze voorbeelden:
 - $75 - 25 = 50$ want $75 = 50 + 25$;
 - $60 - 35$ is evenveel als $30 - 5$: dus 25. $80 - 34$ is evenveel als $50 - 4$, dus 46.

Figuur 4.2 Beheersingsniveau van de basisautomatismen: optellen en aftrekken tot 100 (rekendictee). Voorbeeldopgaven 1 tot en met 21 in oplopende moeilijkheidsgraad

80% beheersing of meer	Dubbelstructuur (en analogie)	Vijf- en vijftigstructuur (en analogie)	Tienstructuur	Splitsingen van 10 en 100
groep Laag	(1) 12 – 7			(2) 32 + 8 (3) 100 – 9
	(4) 84 – 40 (5) 58 – 4 (6) 17 – 7			
		(7) 56 – 50		
	(8) 48 + 40	(9) 27 + 50		(10) 70 – 7
		(11) 56 – 50		
groep Midden en Hoog	(12) 15 – 8	(13) 79 – 5	(14) 45 + 9	(15) 45 + 55
	(16) 60 – 35 (17) 92 – 6	(18) 75 – 25 (19) 80 – 34		(20) 98 + 7 (21) 63 + 37

Bron: Kraemer e.a., 2005, p. 63

Optellen en aftrekken

De gegevens over optellen en aftrekken doen ten slotte vermoeden dat de minder vaardige leerlingen splitsen als alternatief voor rijgen kunnen gebruiken, bijvoorbeeld om te voorkomen dat ze over een grote afstand moeten gaan tellen.

Kenmerken van de opgaven

In hoofdstuk 1 zijn de beschikbare aanwijzingen over flexibel rekenen gepresenteerd. Op basis daarvan is in hoofdstuk 2 in kaart gebracht welke rekenstrategieën en welke hoofdrekenmethoden de kenmerken, verschillende contexten en de getallen van de 17 geselecteerde opgaven zouden kunnen uitlokken. Deze verwachtingen worden hieronder per context op een rijtje gezet.

Figuur 4.3 Kenmerken van de 17 voorgelegde optel- en aftrekopgaven

Nr	Vorm	Betekenis van aftrekken	Verwachte strategie	Aantrekkingskracht hoofdrekenmethode*		
				Rijgen	Splitsen	Afleiden
Optelopgaven						
7	context	Samennemen/erbij doen	Optellen	++	?	+
15	kaal		++	+		
Aftrekopgaven						
1	context	Aanvullen	Optellen tot	+	++	++
5	context		+	++		
8	context		++	?		
11	context		++		+	
17	kaal		++	+		
2	context	Verschil bepalen	Aftrekken tot	++		++
6	context		+	?	++	
13	context		Optellen of aftekken tot	++		
3	context	Part bepalen	Geen aanwijzingen	++	?	
9	context		hierover	++	?	
14	context		++			
4	kaal	Weghalen	Aftrekken of optellen tot	++	?	++
10	kaal		++	?		
12	kaal		++	?	+	
16	context		++	+		
* ++ sterk + matig ? afhankelijk van het aanbod						

Optellen (opgave 7 en 15)

- Splitsend optellen met getallen groter dan 100 is in de onderzoeksperiode op de meeste scholen nog niet geïntroduceerd. Leerlingen zullen daarom opgave 15 eerder rijgend dan splitsend oplossen.

- De geldcontext van opgave 7 kan splitsend optellen uitlokken, hetzij in combinatie met rijgen (combinatiemethode), hetzij kolomsgewijs, omdat de handelingen in beide gevallen vrij simpel zijn:
 - $30 + 10 = 40$; $40 + 5 = 45$ en $45 + 9 = 54$;
 - $40 + 10 = 40$; $5 + 9 = 14$; $40 + 14 = 54$.
- De getallen van opgave 7 lokken redeneren uit in de vorm van afronden en compenseren.
- Leerlingen die opgave 15 maken behoren tot de groep meest vaardige leerlingen. De getallen van deze opgave kunnen deze leerlingen aansporen om de optelling te transformeren en dus af te leiden in plaats van te rijgen ($306 + 698$ is evenveel als $700 + 304$).

Aftrekken

Aanvullen (opgave 1, 5, 8, 11 en 17)

In de regel lokken contexten waarbij er sprake is van aanvullen (vol maken) sterk aanvul-handelingen uit, die meestal rijgend worden uitgevoerd. Sommige leerlingen schematiseren dergelijke problemen in de vorm van een stipsom. Deze som wordt splitsend opgelost door uit te zoeken hoeveel tien en hoeveel enen erbij moeten komen om het onbekende getal te krijgen.

- Opgave 1, 5 en 8 kunnen op deze manier worden opgelost.
- Leerlingen zullen opgave 1, 5 en 8 splitsend uitrekenen, afhankelijk van de aandacht die aan de combinatiemethode wordt gegeven en van de introductie van aftrekken met tekort.
- De getallen van opgave 1, 11 en 17 kunnen redeneren uitlokken, hetzij via de associatie met een bekend feit (opgave 1), hetzij via afronden en compenseren (opgave 11 en 17).

Verskil bepalen (opgave 2, 6 en 13)

Deze opgaven komen sterk overeen met de ‘verschilsommen’ die in de klas worden behandeld. Dit type opgaven wordt in de regel rijgend, aanvullend optellend (optellen tot) of aftrekkend opgelost, afhankelijk van de relatieve grootte van het verschil en de ligging van de getallen.

- Leerlingen die de combinatiemethode kennen en/of met tekort hebben leren aftrekken, kunnen geneigd zijn om opgave 6 splitsend aftrekkend uit te rekenen.
- De getallen van opgave 2 lokken meer het redeneren uit, op basis van de inverse relatie: $22 - 18 = 4$, want $18 + 4 = 22$.
- Het getal 24 in combinatie met 40 kan in opgave 6 de associatie met dubbel 20 is 40 uitlokken en hierdoor redeneren uitlokken.

Part bepalen (opgave 3, 9 en 14)

Er zijn geen Nederlandse gegevens beschikbaar over de invloed van dit type context op de rekenhandelingen. Op basis van hun getalbegrip en begrip van aftrekken kunnen leerlingen in principe alle drie de strategieën volgen: aftrekken, optellen tot en aftrekken tot.

- Alle drie de opgaven kunnen gemakkelijk rijgend worden opgelost, zeker als de leerling de strategie van aanvullen volgt (optellen tot).
- Of ze opgave 3 en 9 splitsend aftrekkend oplossen, hangt van het aanbod af (zie hierboven *verschil bepalen*).
- Leerlingen die weten dat 50 evenveel is als $25 + 25$ kunnen de uitkomst van opgave 3 direct met dit geheugenfeit associëren.
- De combinatie van 48 met 100 in opgave 9 doet sterk denken aan $50 + 50 = 100$ en kan daarom redeneren uitlokken.

Weghalen (opgave 4, 10, 12 en 16)

Leerlingen maken in de regel geen verschil tussen kale aftrekkingen en problemen waar aftrekken de betekenis heeft van weghalen. Alle vier de opgaven lokken in die zin aftrek-handelingen uit.

- De getallen van opgave 12 en 16 kunnen de strategie aanvullend optellen uitlokken. Dit wordt in de meest gevallen rijgend uitgevoerd en niet splitsend.

- Of de leerling rijgend op splitsend aftrekt, hangt af van de aandacht die splitsen krijgt. Hoe meer aandacht, des te groter de kans dat de leerlingen gaan splitsen.
- Opgave 4 kan redeneren uitlokken omdat $30 + 30 = 60$ een veel gebruikte ‘dubbel’ is.
- Leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep kunnen in principe het onbekende getal van het aftrekprobleem van opgave 16 uit de splitsing van 900 in 600 + 300 afleiden of gebruikmaken van het principe van het gelijk blijvende verschil ($306 + 698 = 700 + 304$).

4.3 Onderzoeksvragen

- 1 Volgens welk patroon en hoe vaak wisselen de leerlingen rijgen af met splitsen, redeneren en geheugenfeiten?
- 2 Hoe succesvol zijn de leerlingen die het rijgen met één of meer andere hoofdrekenmethodes combineren?

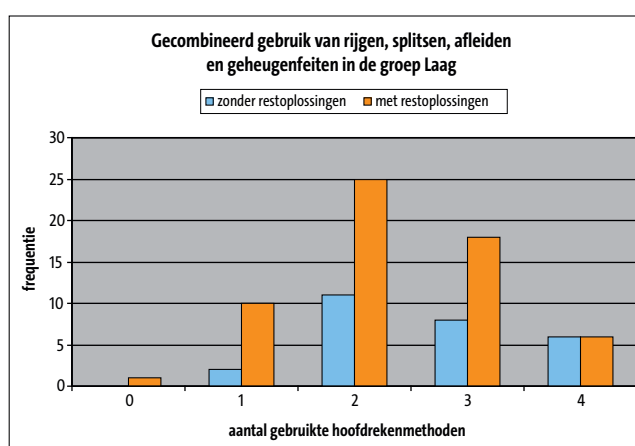
4.4 Analyse

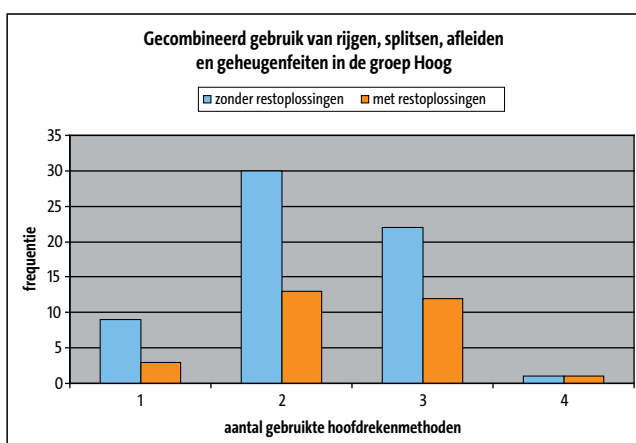
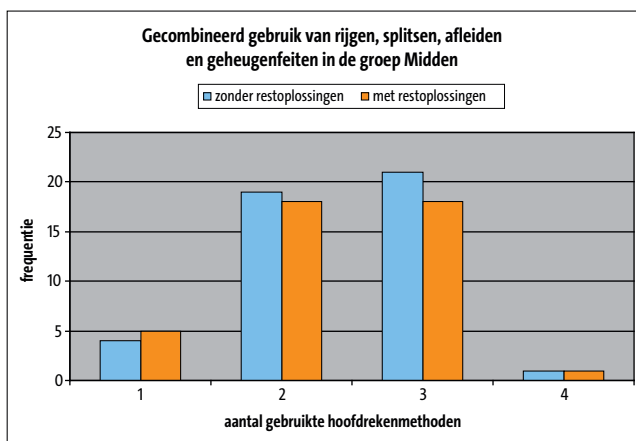
Het afwisselend gebruik van rijgen, splitsen, redeneren en geheugenfeit is vastgesteld op basis van de oplossingen van de 265 leerlingen die een complete set opgaven hebben gemaakt. Deze leerlingen zijn in twee groepen verdeeld, een groep mét en een groep zónder *restoplossingen*, dit omdat 25% van de restoplossingen tot een correcte uitkomst leiden. In elke groep is vervolgens geteld hoeveel leerlingen respectievelijk één, twee, drie of vier hoofdrekenmethoden hebben gebruikt.

De mate van succes wordt in een relatieve score uitgedrukt. Deze score is het totale aantal correcte antwoorden van de groep leerlingen die volgens het betreffende patroon heeft gerekend, gedeeld door het totale aantal gemaakte opgaven.

Om de interpretatie van de tabellen te vergemakkelijken, zijn de geobserveerde frequenties per vaardigheidsgroep in een diagram verwerkt, waarin de frequentie percentueel wordt weergegeven (zie figuur 4.3).

Figuur 4.3 Gebruiksfrequentie van het gecombineerd gebruik van rijgen, splitsen, redeneren en geheugenfeit per vaardigheidsgroep





4.5 Resultaten

Flexibel rekenen op basis van rijgen, splitsen, redeneren en geheugenfeiten

Uit de analyse van de oplossingen komen vier algemene aanwijzingen naar voren:

- De leerlingen die slechts één methode gebruiken, passen altijd een rijgprocedure toe. Deze leerlingen zijn rijgers ‘pur sang’.
- De leerlingen die twee hoofdrekmethoden toepassen, gebruiken afwisselend rijgen en splitsen.
- De frequentieverdeling in de groep die wel of geen restoplossingen gebruikt, geeft aan dat het gros van de leerlingen twee of drie hoofdrekmethoden gebruikt.
- Het gebruikspatroon van leerlingen met restoplossingen is in de groepen Hoog en vooral Midden vrijwel hetzelfde als dat van de leerlingen zonder restoplossingen. De variatie is groter in de groep Laag, waar het aantal restoplossingen beduidend hoger is.

De uitgevoerde analyses geven onderstaande aanwijzingen over de wijze waarop de leerlingen uit de groep Laag, Midden en Hoog flexibel rekenen.

Groep Laag

Leerlingen uit de PPON-steekproef hebben opgaven 1 t/m 7 gemaakt, leerlingen uit de LOVS-groep dezelfde opgaven plus opgave 9 en 11.

Vijf van deze opgaven kunnen, door de context en/of de getallen, splitsprocedures uitlokken en in acht van de negen opgaven kan de leerling de uitkomst op een of andere manier uit een

bekende optelrelatie redeneren (zie figuur 4.3).

De gevonden patronen geven vier aanwijzingen:

- Er zijn weinig leerlingen die alleen rijgen, niet meer dan 7% in de groep leerlingen zonder restoplossingen.
- Ruim 40% van de leerlingen uit de groep Laag gebruikt splitsen als alternatief voor rijgen.
- 30% van de leerlingen wisselt rijgen af met splitsen én redeneren (of geheugenfeit).
- Een vijfde deel van de groep gebruikt de vier hoofdrekenmethoden.

Deze resultaten suggereren dat leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep zich sterk laten leiden door, voor hen, relevante kenmerken van de opgaven.

Groep Midden

Leerlingen uit de PPON-steekproef hebben opgaven 6 t/m 12 gemaakt, leerlingen uit de LOVS-groep dezelfde opgaven plus opgave 1 en 13.

Zes van deze opgaven kunnen, door de context en/of de getallen, splitsprocedures uitlokken.

De leerling kan in vijf van de negen opgaven de uitkomst afleiden, minder vaak dan de leerling die de gemakkelijkste set opgaven maakt (zie figuur 4.3).

De gevonden patronen geven drie aanwijzingen:

- Er zijn weinig leerlingen die alleen rijgen, niet meer dan 8% in de groep leerlingen zonder restoplossingen.
- Er zijn evenveel leerlingen die splitsen als alternatief voor rijgen gebruiken als leerlingen die rijgen met splitsen én afleiden (of geheugenfeit) afwisselen (40% van de groep).
- Het gebruik van de vier hoofdrekenmethoden komt incidenteel voor.

Deze resultaten suggereren dat de groep Midden uit drie subgroepen bestaat: een kleine groep rijgers (rond de 10%) en twee even grote groepen die *splitsen óf splitsen én redeneren* (incidenteel *geheugenfeit*) als alternatief voor rijgen gebruiken.

Groep Hoog

Leerlingen uit de PPON-steekproef hebben opgaven 10 t/m 17 gemaakt, leerlingen uit de LOVS-groep dezelfde opgaven plus opgave 6, 9 en 13.

Vier van deze opgaven kunnen splitsprocedures uitlokken door de context en/of de getallen. Dit is veel minder dan in de twee overige sets opgaven, omdat de getallen in de meeste opgaven groter zijn 100. Ook in deze set kan de leerling hooguit vijf opgaven afleidend oplossen (zie figuur 4.3).

De gevonden patronen geven drie aanwijzingen:

- 15% van de leerlingen uit de groep zonder restoplossingen gebruikt alleen rijprocedures.
- Ongeveer de helft van deze groep wisselt rijgen met splitsen af.
- Het resterende derde deel van de groep wisselt rijgen af met splitsen én redeneren (of geheugenfeit).

De grote groep van leerlingen die splitsen met rijgen combineert is verrassend, omdat het splitsen met getallen groter dan 100 nog niet aan bod is geweest.

Deze resultaten kunnen betekenen dat veel leerlingen met een hoge rekenvaardigheid in staat zijn de rijg- én splitshandelingen, die ze met succes in het getalgebied tot 100 gebruiken, geschikt te maken voor het bewerken van getallen groter dan 100.

Succes

De relatieve successcores laten twee zaken zien:

- Niet alle leerlingen die alleen rijgen zijn zeer succesvol.
- Het gebruik van rijgen-splitsen-redeneren is in de middengroep minder effectief dan het afwisselend gebruik van rijgen en splitsen.,

In figuur 4.4 staat het succespercentage per gebruikspatroon weergegeven.

Figuur 4.4 Succes per gebruikspatroon (rijgen, splitsen, afleiden en geheugenfeiten)

Groep Laag		
Aantal gebruikte methoden	Zonder restoplossingen Gemiddeld % correcte antwoorden	1 of meer restoplossingen Gemiddeld % correcte antwoorden
1	80	53
2	83	53
3	89	60
4	75	72
Groep Midden		
Aantal gebruikte methoden	Zonder restoplossingen Gemiddeld % correcte antwoorden	1 of meer restoplossingen Gemiddeld % correcte antwoorden
1	89	61
2	88	68
3	77	57
4	100	86
Groep Hoog		
Aantal gebruikte methoden	Zonder restoplossingen Gemiddeld % correcte antwoorden	1 of meer restoplossingen Gemiddeld % correcte antwoorden
1	96	77
2	88	63
3	83	65
4	57	78

De uitgevoerde analyses geven onderstaande aanwijzingen over de vaardigheid van de leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog bij flexibel rekenen.

Groep Laag

- De groep leerlingen zonder restoplossingen, die rijgen combineert met splitsen én redeneren, is het meest succesvol. Deze leerlingen behalen een relatieve score van bijna 90% correcte antwoorden.
- Het afwisselende gebruik van rijgen en splitsen is minder effectief. Het verschil in succes met een gecombineerde toepassing bedraagt 6%.
- Leerlingen die alleen rijgen bereiken goede resultaten. Acht van de tien antwoorden van deze groep zijn goed.
- De groep die alle vier de methoden gebruikt is het minst succesvol (75% correcte antwoorden). Dit is vrij ernstig, omdat bijna 15% van de leerlingen uit de groep Laag op deze manier rekent.

Concluderend kan worden gesteld dat hooguit 30% van de leerlingen uit de groep Laag goede resultaten bereikt met het afwisselende gebruik van rijgen, splitsen en redeneren.

Groep Midden

- Leerlingen die afwisselend rijgen en splitsen halen beduidend betere resultaten dan de leerlingen die op basis van de drie methoden rekenen. Het verschil in succes bedraagt 11% in de groep leerlingen zonder restoplossingen (88% tegen 77%).
- De kleine groep rijgers is even succesvol als de groep die afwisselend rijgt en splitst (89% correcte antwoorden).

Deze resultaten suggereren dat ook leerlingen uit de middengroep minder voordeel hebben van rekenen op basis van rijgen, splitsen en redeneren dan verondersteld. Dit is vrij ernstig, omdat álle opgaven, op opgave 13 na, tot het rekenen tot 100 behoren. Een lichtpuntje is dat het gebruik van rijgen en splitsen wel degelijk loont.

Groep Hoog

- De rijgers uit de groep zonder restoplossingen behalen een uitzonderlijk hoge score, namelijk 96% correcte antwoorden. Ook rijgers met restoplossingen halen goede resultaten: bijna 80% correcte antwoorden.
- Het afwisselende gebruik van rijgen en splitsen levert 8% minder correcte antwoorden op dan alleen rijgen (88%) en 5% meer dan rekenen op basis van de drie methoden.

Deze resultaten suggereren dat leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep vooral profijt hebben van rijgen en dat de combinatie van rijgen met splitsen ook zeer effectief is.

4.6 Aandachtspunten

Bovenstaande resultaten richten de aandacht op twee kwesties:

- de factoren die het succes van de rijgers bepalen;
- de factoren die het succes van flexibel rekenen bepalen op basis van rijgen, splitsen en redeneren.

Voorwaarden voor succesvol rijgen

Een verrassend resultaat is dat de groep rijgers ‘pur sang’ vrij beperkt is, terwijl in de onderbouw wel de nadruk op deze vorm van rekenen wordt gelegd. De variatie in de omvang van deze groep wordt ongetwijfeld veroorzaakt door de interactie van verschillen in aanbod, leerlingkenmerken en opgavekenmerken. Het ligt voor de hand om te veronderstellen dat de groep leerlingen met de hoogste rekenvaardigheid relatief veel rijgers telt, omdat deze leerlingen vooral opgaven met getallen groter dan 100 maken en nog niet met dergelijke getallen hebben leren splitsen. Het omgekeerde geldt voor de leerlingen uit de groepen Laag en Midden. Zij maken (vrijwel) uitsluitend opgaven uit het getalgebied tot 100 die bovendien meer uitnodigen om van methoden te wisselen.

Figuur 4.5 Mate van succes van de 'rijgers'

Analyse	Vaardigheidsniveau		
	Laag	Midden	Hoog
Hoofdstuk 3	% correcte antwoorden in de rijgoplossingen		
Gebruiksfrequentie van de 4 hoofdrekenmethoden	79	87	91
Hoofdstuk 4	relatieve score van de rijgers 'pur sang'		
Gecombineerd gebruik van de 4 hoofdrekenmethoden	80% goed	90% goed	96% goed

De verschillen in het succes van de 'rijgers' roept de vraag op naar de invloed van leerling-kenmerken op de wijze van hoofdrekenen en de vaardigheid van de leerling. De trend in de resultaten van de analyses van gebruiksfrequentie (hoofdstuk 3) en gecombineerd gebruik van hoofdrekenmethoden (hoofdstuk 4), zoals weergegeven in figuur 4.5, wijst in de richting van een verband tussen de mate van succes bij rijgen en het vaardigheidsniveau van de leerling. De zeer hoge score van de 'rijgers' in de vaardigheidsgroep Hoog valt op. Het lijkt alsof deze leerlingen sterk hun stempel drukken op de effectiviteit van het rijgen op dit vaardigheidsniveau. Dit zou kunnen betekenen dat ze succesvoller zijn, omdat ze vaker en adequater gebruik maken van rijgstrategieën en -procedures die het uitrekenen van de opgaven vergemakkelijken. Anders gezegd: meer dan hun minder vaardige groepsgenoten kunnen ze inzichtelijk én vaardiger *flexibel rijgen*.

De variatie tussen vaardigheidsniveaus in de grootte van de groep 'rijgers' en in het succes dat ze behalen, roept concluderend twee vragen op:

- In hoeverre hangt de neiging om alleen te rijgen samen met het vaardigheidsniveau van de leerling?
- In hoeverre hangt het succes van de 'rijgers' samen met de mate waarin ze op basis van verschillende strategieën en procedures rijgen?

De eerste vraag wordt in hoofdstuk 5 beantwoord, de tweede in het deel 3 *Over rijgend aftrekken*.

Voorwaarden voor flexibel rekenen op basis van rijgen, splitsen en redeneren

Leerlingen uit jaargroep 5 weten minder goed dan verondersteld gebruik te maken van de voordelen van rijgen, splitsen en redeneren bij het oplossen van een reeks gemengde opgaven. Dit kan komen door een inadequate afstemming van de gebruikte hoofdrekenmethoden op de kenmerken van de opgaven en/of door de onvoldoende beheersing van de alternatieve splits- en afleidprocedures. De resultaten van de eerste analyse (figuur 4.6) duiden erop dat veel leerlingen uit jaargroep 5 splitsen en vooral redeneren onvoldoende beheersen om te kunnen profiteren van de voordelen van beide methoden en om de nadelen van rijgen te kunnen opvangen.

Figuur 4.6 Percentage correcte antwoorden per hoofdrekensmethode

Vaardigheidsniveau	Rijgen	Splitsen	Redeneren
Laag	79%	68%	46%
Midden	87%	65%	56%
Hoog	91%	68%	68%

De vraag die rijst, is in hoeverre de leerlingen hun rekenmethoden (rijgen, splitsen en redeneren) adequaat op de kenmerken van de opgaven afstemmen. Dit moet blijken uit de gedetailleerde analyse van de strategieën en procedures die de leerlingen bij rijgen, splitsen en redeneren gebruiken en die in de hierna volgende delen worden gerapporteerd.

In hoofdstuk 5 bespreken we als eerste het rijgend optellen en aftrekken.

Impressies van het gebruik van rijgen in combinatie met splitsen, redeneren en geheugenfeiten

Losanne (vaardigheidsniveau Laag)

Opgave 1 (rijgen)

Snapt wat er aan de hand is

$10 + 10 = 20$; 20 plus 2 is 22 (denkt aan $12 + 10 = 22$) 22 plus 5 is 27.

27 is het antwoord

(verwarring bij aanvullen van 22 tot 25; doet waarschijnlijk de 5 van 25 erbij)

Opgave 2 (geheugenfeit)

$18 + ? = 22$, dat is 4!

Opgave 3 (geheugenfeit)

$25 + 25 = 50$; antwoord 25

Opgave 4 (rijgen)

$30 - 60 = 30$; $30 - 5 = 25$; antwoord 25

Opgave 5 (rijgen)

$25 + 10 = 30$; de 5 moet een 6 worden, dus + 1 dan is het ook 36.

Dus het antwoord is dan 31.

In boekje: $25 + 10 = 35?? + 1 = 36$

Het antwoord is 36 (in plaats van 11)

(foutieve interpretatie van rekenstappen)

Opgave 6 (redeneren)

$20 + 20 = 40$. Dan staat links een 4, dus $40 - 4 = 16$ (bedoelt $20 - 4 = 16$)

Opgave 7 (splitsen)

$30 + 10 = 40$; $40 + 9 = 49$; $49 + 5 = 54$. Vlot, zonder aarzeling.

Hessel (vaardigheidsniveau Midden)

Opgave 1 (geheugenfeit)

Hessel ziet het zo. 13!

Opgave 6 (rijgen)

Hessel denkt even na en zegt: ik doe van de 40, 20 af, dat is 20.

Daarna nog 4 eraf dat is 16.

In boekje opgeschreven (achter elkaar): $40 - 20 = 20 - 4 = 16$

Opgave 7 (splitsen)

Nou ik doe $30 + 10 = 40$ en ik doe $5 + 5 = 10$; $10 + 4 = 54$.

Hessel denkt na en ziet dat hij een fout heeft gemaakt.

Hij verbetert deze en herhaalt de som nog eens.

In boekje (achter elkaar opgeschreven): $30 + 10 = 4 + 5 + 5 = 10 + 4 = 54$

Opgave 8 (rijgen)

Hessel zegt: ik doe $50 - 32 =$

Van de 50 doe ik er 32 af. Eerst 30 af, dat is dan 20 en daarna nog 2, dat is dan 18.

In boekje opgeschreven: $50 - 32 = 18$

Opgave 9 (rijgen)

Hessel denkt na: $100 - 48 = ?$

Van de 100 doe ik 40 af, dat is 60.

Van de 100 doe ik er 8 af.

Herhaalt het eerste stuk:

van de 60, doe ik er 8 af, dan heb ik er 52. Eerst 5 eraf, dan nog 3 eraf dat is dan 52.

In boekje opgeschreven: $100 - 48 = 52$

Opgave 10 (rijgen)

Hessel zegt: doe ik van de 100 – 80 af. Dat is 20. En doe ik van de 20 nog 6 af.

$20 - 6 = \dots$

Herhaalt $20 - 6 = 14$. Eerst $20 - 5 = 15$ en dan nog 1 en dat is dan 14.

In boekje (achter elkaar): $100 - 80 = 20 - 6 = 14$

Opgave 11 (redeneren)

eh ... Hessel zegt: $102 - \dots$ Denkt hardop na: min 90 is 10 is 10 min 2 is 8. Van de 102 doe ik er 90 af dat is 10, nee dat is 12, dat heb ik fout gedaan. Wat nu?

Begint opnieuw. $102 - 90 = 12$; van de 12 doe ik er 2 af is 10. (antwoord is 12).

Vraag: hoe heb je het gedaan?

$102 - 90$; eerst heb ik 100 in mijn hoofd. Dan doe ik er 90 af, dat is 10 en dan nog weer 2 erbij. ($100 - 90$ en compenseren)

In boekje opgeschreven:

$102 - 90 = 10 - 2 = 8$

$102 - 90 = 12 - 2 = 10$

Opgave 12 (rijgen)

Hessel schrijft de som op en zegt: van de 62 doe ik er 40 af, dat is 22 en dan 2 eraf is 20 en dan 6 eraf en dat is 14

In boekje opgeschreven: $62 - 48 = 14$

Opgave 13 (rijgen)

Hessel denkt hardop na: 189 dat is minder dan 250. Verschil is 100.

Kijkt naar de plaatjes. Verschil is 111.

Hessel schrijft nu de som op, vraagt of het ook in een antwoordsom mag.

Hoe heb je dat gedaan?

Hessel: ik doe er 100 bij. Ik heb een fout.

Hij kijkt opnieuw. Ik doe er 61 bij.

Antwoord is 61

Geen aantekeningen in het boekje.

Merel (vaardigheidsniveau Hoog)

Opgave 6 (rijgen)

$$40 - 24$$

$$20 - 40 = 20; 20 - 4 = 16$$

$$16 \text{ erbij } 20 \text{ is } 36.$$

$$36 \text{ is de uitkomst}$$

Opgave 9 (geheugenfeit)

$$48 \dots 100, 100 - 48 = 52$$

$$\text{In boekje genoteerd: } 100 - 48 = 52$$

(Bandopname mislukt)

Opgave 11 (geheugenfeit)

$$90 - 102. \text{ Ik draai het om. } 102 - 90 = 12$$

$$\text{In boekje: } 102 - 90 = 12$$

(Bandopname mislukt)

Opgave 12 (rijgen)

$$62 - 48$$

$$\text{Eerst } 40 - 60. \text{ Nee! } 60 - 40 = 20$$

$$2 - 8 \text{ kan niet}$$

Merel verlaat splitsen voor rijgen

$$62 - 40 = 22; 22 - 8 = 14$$

In boekje genoteerd:

$$62 - 48$$

$$60 - 40 = 20$$

$$62 - 40 = 22$$

$$22 - 8 = 14$$

Opgave 13 (rijgen)

$$250 - 189$$

$$200 - 100; 250 - 100 = 150$$

$$150 - 9 ?$$

$$50 - 9 = 1$$

Wat moet ik dan doen?

Denkt even na en vindt zelf de weg: $150 - 80 = 70$; $70 - 9 = 61$

Opgave 14 (rijgen)

$$620 - 370 \text{ is}$$

1e poging kolomsgewijs

$$600 - 300 = 300$$

$$70 - 20 = 50; 20 - 70 = 50$$

2e poging rijgend

$$620 - 300 = 320; 320 - 70 = 250$$

Opgave 15 (splitsen)

$$\text{Eerst: } 600 + 300 = 900$$

$$\text{Dan: } 98 + 6 = 104$$

$$900 + 104 = 1004$$

Als volgt in het boekje genoteerd:

$$600 + 300 = 900; 98 + 6 = 104; 900 + 104 = 1004$$

Opgave 16 (geheugenfeit)

$$900 - 95$$

Wat zal ik eerst doen ?

Dan reken ik het in één keer uit!

Het is 305, nee! 205; $595 + 205$ is ... Oh

O nee het is toch 305

In boekje opgeschreven

$$900 - 595 = 305$$

Opgave 17 (rijgen)

Daar snap ik niks van.

Eerst grote getal ?

$$998, \text{ erbij } 2 \text{ is } 1000$$

$$662 + 2 = 664$$

Het antwoord is 664

In boekje genoteerd:

$$998 + 2 = 1000$$

$$662 + 2 = 664$$

5 Meer rijgers in de top van de populatie

Sommige leerlingen uit jaargroep 5 rijgen altijd, welke opgave ze ook oplossen. De vergelijking van het aantal keer dat de leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog rijgen bij het uitrekenen van de ankeropgaven geeft een impressie van de samenhang tussen het gebruik van rijgen en het vaardigheidsniveau.

5.1 Inhoud

Uit de analyse van het gebruik van rijgen, splitsen, redeneren en geheugenfeiten is gebleken dat er in elke vaardigheidsgroep een kleine groep leerlingen is die altijd rijgt. In dit hoofdstuk wordt verslag gedaan van het verkennend onderzoek naar het verband tussen de gebruiksfrequentie van rijgen en het vaardigheidsniveau van de leerling, op basis van de oplossingen van de gemaakte ankeropgaven.

5.2 Onderzoeksvraag

In hoeverre hangt de gebruiksfrequentie van rijgen samen met het vaardigheidsniveau van de leerling?

5.3 Analyse

De analyse is uitgevoerd op basis van 2100 oplossingen van 133 leerlingen uit de steekproef van LOVS-scholen en 132 leerlingen uit de steekproef van PPON-scholen die alle opgaven van hun set hebben gemaakt. Het schema van figuur 5.1 geeft een overzicht van de uitgevoerde analyses die hieronder worden toegelicht.

Figuur 5.1 Analyseschema voor het rijgedrag

Vergelijkingen LOVS-leerlingen	1e ronde LOVS # PPON	2e ronde Totale groep	3e ronde
Laag # Midden <i>Ankeropgave 1, 6, 7, 9 en 11</i>	Analyse 1a <i>Ankeropgave 6 en 7</i>	Analyse 2a	
Laag # Hoog <i>Ankeropgave 6, 9, 11, 12 en 13</i>	Analyse 1b	Analyse 2b <i>Ankeropgave 11 en 12</i>	
Laag # Midden # Hoog			Analyse 3 <i>Ankeropgave 6, 9 en 11</i>

- In de eerste ronde analyses is de gebruiksfrequentie van het rijden in de groep LOVS-leerlingen vergeleken, omdat deze leerlingen het grootste aantal gemeenschappelijke opgaven hebben gemaakt. Twee clusters van vijf opgaven worden hiervoor gebruikt (analyse 1a en 1b).
- In een tweede ronde analyses is onderzocht in hoeverre de leerlingen uit beide steekproeven even vaak rijden bij het oplossen van de ankeropgaven van de drie sets, respectievelijk opgave 6 en 7 van set 1 en 2 en opgave 11 en 12 van set 2 en 3 (analyse 2a en 2b).
- De verandering van het design bij de LOVS-afname biedt de mogelijkheid om de rekenhandelingen van alle drie de vaardigheidsgroepen op basis van de oplossingen van opgave 6, 9 en 11 te vergelijken. Dit is de derde analyse die in de afsluitende onderzoeksrunde is uitgevoerd (analyse 3).

Analyse 1a en 1b zijn gebaseerd op de oplossingen van vijf ankeropgaven. Het aantal keer dat wordt geregen loopt daarom op van 0 keer tot maximaal 5 keer. De oorspronkelijke tabel is ingedikt om de chi-kwadraat test te kunnen uitvoeren, uitgaande van onderstaande definitie van een 'rijger' en toewijzingsregels:

- Definitie: een 'rijger' is een leerling die de meeste voorgelegde opgaven rijgend oplost.
- Toewijzingsregels:
 - (i) Als vijf opgaven worden opgelost, moet een leerling vier of vijf van deze opgaven rijgend oplossen om de kwalificatie 'rijger' te krijgen.
 - (ii) Bij de oplossing van drie opgaven wordt een leerling 'rijger' genoemd als hij alle drie de opgaven rijgend uitrekent.

5.4 Resultaten

De resultaten zijn niet eenduidig. De volgende drie zaken vallen op:

- De vergelijking van het rijgedrag van de LOVS-leerlingen op basis van de vijf beschikbare ankeropgaven laat geen significant verschil zien in de gebruiksfrequentie van het rijden tussen de groepen Laag, Midden en Hoog.
- De vergelijking van het rijgedrag van de totale groep bij het oplossen van de ankeropgaven signaleert wel significante verschillen tussen aan de ene kant de groepen Laag en Midden en aan de andere kant de groepen Midden en Hoog.
- Vergelijkbare verschillen worden gevonden bij de vergelijking van het rijgedrag bij het oplossen van de opgaven 6, 9 en 11 die door alle LOVS- en PPON-leerlingen zijn gemaakt. Hieronder volgen de resultaten van de uitgevoerde analyses.

Analyse 1: Rijgedrag in de LOVS-steekproef

Laag versus Midden

12 leerlingen uit de groep Laag en 16 leerlingen uit de groep Midden kunnen als rijgers worden beschouwd (een derde deel van het totaal van 86 leerlingen). Ze hebben vier of vijf keer geregen. De statistische toets geeft aan dat de geobserveerde frequentieverdeling niet significant afwijkt van de verwachte verdeling. Dit betekent dat leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep niet anders rijden dan hun jaargenoten uit de middengroep.

Midden versus Hoog

51 van de 90 leerlingen uit de groepen Midden en Hoog kunnen als rijgers worden beschouwd. Dat is iets meer dan de helft van de totale groep. De statistische toets toont een afwijking op 10%-niveau die onvoldoende is om te kunnen spreken van een verschil in rijgedrag tussen leerlingen uit beide groepen. Deze afwijking signaleert wel een tendens dat leerlingen uit de groep Hoog vaker rijden dan leerlingen uit de groep Midden. 33 leerlingen uit de groep Hoog rijden vier of vijf keer, tegen 18 in de groep Midden.

Analyse 2: Vergelijking op basis van de oplossingen van de ankeropgaven 6-7 en 11-12

Laag versus Midden

De vergelijking is gebaseerd op de oplossingen van ankeropgaven 6 en 7 die de LOVS-leerlingen uit de vaardigheidsgroepen Laag en Midden hebben gemaakt. De statistische toets toont een afwijking op 1%-niveau (figuur 5.2). Dit betekent dat leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep volgens een ander patroon rijgen dan leerlingen uit de middengroep. De verschillen zijn niet eenduidig. Het aantal leerlingen dat niet rijgt is in de groep Laag groter dan verwacht, evenals het aantal leerlingen dat minstens één van de twee opgaven rijgend oplost. Er zijn daarentegen meer leerlingen dan verwacht die beide opgaven rijgend oplossen. Het omgekeerde geldt voor de middengroep waar minder leerlingen dan verwacht nul keer en twee keer rijgen en meer leerlingen minstens één keer rijgen.

Figuur 5.2 Frequentie van rijgen in de groepen Laag en Midden bij de opgaven 6 en 7

Frequentie	LOVS – Laag		LOVS – Midden		Totaal
	Geobserveerd	Verwacht	Geobserveerd	Verwacht	
0 keer	23	23	23	23	46
1 keer	41	41	41	41	82
2 keer	23	23	23	23	46
Totaal	87	87	87	87	174
Chi kw = 11,22; significant op 1% niveau					

Midden versus Hoog

De vergelijking van het rijgedrag bij het oplossen van ankeropgaven 11 en 12 signaleert op haar beurt significante verschillen tussen de leerlingen uit de middengroep en leerlingen met de hoogste rekenvaardigheid (figuur 5.3). Er zijn meer leerlingen uit de groep Hoog dan verwacht die beide opgaven rijgend oplossen en minder leerlingen die niet rijgen. Er zijn daarentegen minder leerlingen dan verwacht die minstens één van de twee opgaven rijgend oplossen. Het omgekeerde geldt voor de leerlingen uit de middengroep.

Figuur 5.3 Frequentie van rijgen in de groepen Midden en Hoog bij de opgaven 11 en 12

Frequentie	LOVS – Midden		LOVS – Hoog		Totaal
	Geobserveerd	Verwacht	Geobserveerd	Verwacht	
0 keer	18	15	12	15	30
1 keer	47	40	34	41	81
2 keer	22	33	45	34	67
Totaal	87	87	91	91	178
Chi kw = 8,38; significant op 1% niveau					

Analyse 3: Vergelijking op basis van de oplossingen van opgave 6, 9 en 11

De laatste vergelijking bevestigt de trend die in de tweede ronde is gevonden. De oorspronkelijke frequentietabel van figuur 5.4a geeft een indruk van de overeenkomsten en verschillen in rijgedrag. Heel opvallend is het verschil tussen de groepen Laag en Hoog.

Figuur 5.4a Oorspronkelijke frequentieverdeling bij het oplossen van opgaven 6, 9 en 11

Frequentie	Totale groep geobserveerd			Totaal
	Laag	Midden	Hoog	
0 keer	4	2	1	7
1 keer	10	7	2	19
2 keer	21	20	14	55
3 keer	8	14	30	52
Totaal	43	43	47	133

De statistische toets is uitgevoerd op basis van de ingedikte tabel van figuur 5.4b, waarin de rijgers tegenover de rest van de groep worden afgezet. Deze toets signaleert een significante afwijking op 1% niveau. Het aantal leerlingen dat alle drie de opgaven rijgend heeft opgelost, is in de groep Hoog veel groter dan verwacht (30 tegen 17 op een totaal van 47 leerlingen). Het omgekeerde geldt voor de leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep. Deze groep telt veel minder rijgers dan verwacht. Leerlingen uit de middengroep nemen een tussenpositie in.

Figuur 5.4b Frequentie van rijgen in de groepen Laag, Midden en Hoog bij opgave 6, 9 en 11

Frequentie	Totale groep Laag		Totale groep Midden		Totale groep Hoog		Totaal
	Geobserveerd	Verwacht	Geobserveerd	Verwacht	Geobserveerd	Verwacht	
0, 1, 2 keer	35	26	29	26	17	29	81
3 keer	8	17	14	17	30	18	52
Totaal	43	43	43	43	47	47	133
Chi kw = 8,35; significant op 1% niveau							

5.5 Aandachtspunt

De resultaten zijn niet eenduidig interpreteerbaar. Maar er is een tendens waar te nemen die suggereert dat leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep vaker rijgen dan leerlingen uit de andere twee groepen, en met name dan de groep minst vaardige leerlingen.

De vraag die opkomt, is of deze vaardige leerlingen dat doen omdat ze een breder scala van rijgstrategieën en -procedures gebruiken: bijvoorbeeld optellen tot en aftrekken tot via het tienvoud als alternatief voor aftrekken met sprongen van tien. De verklaring zou dan zijn dat het verworven inzicht in de aftrekstructuren en in de relatie met optellen mede bepaalt hoe flexibel leerlingen kunnen rijgen.

De analyse van de gebruikte rijgstrategieën en -procedures in het deel 3 *Over rijgend aftrekken* in dit rapport moet daar antwoord op geven.

Impressies van het gebruik van rijgen in aftrekcontexten

Strategie	Structuur / betekenis van aftrekken				
	Verschil bepalen			Aftrekken	
Aftrekken	[22 – 18 = ?]	[40 – 24 = ?]	[250 – 189 = ?]	[62 – 48 = ?]	[900 – 595 = ?]
	22 – 10 = 12	40 – 20 = 20	250 – 100 = 150	62 – 40 = 22	900 – 500 = 400
	12 – 8 = 4	20 – 4 = 16	150 – 90 = 60 60 – 9 = 51	22 – 8 = 14	400 – 95 = 305
Optellen tot	[18 + ? = 22]	[24 + ? = 40]	[189 + ? = 250]	[48 + ? = 62]	[595 + ? = 900]
	18 + 4 = 22 dus 4	24 + 10 = 34 34 + 6 = 40 dus 16	189 + 11 = 200 200 + 50 = 250 dus 61	48 + 12 = 60 en 2 erbij is 62, dus 14	5 erbij is 600 en 300 erbij is 900, dus 305
Aftrekken tot	[22 – ? = 18]	[40 – ? = 24]	[250 – ? = 189]	[62 – ? = 48]	[900 – ? = 595]
	22 – 4 = 18 dus 4	40 – 10 = 30 30 – 6 = 24 dus 16	250 – 100 = 150 150 – 80 is 70, dus 150 – 89 is 61	62 – 10 = 52 en vier eraf is 48, dus 14	900 – 300 = 600 5 eraf is 595, dus 305
Overbruggen	[18 + ? = 20] [22 – ? = 20]				
	18 + 2 = 20 22 – 2 = 20 2 + 2 = 4				
	Opgave 2	Opgave 6	Opgave 13	Opgave 12	Opgave 16

6 Mengvorm splitsen-rijgen vaak gebruikt bij kaal rekenen

In de schriftelijke toets rekt het gros van de leerlingen uit jaargroep 5 de opgave $35 + 19$ foutloos uit (85% goed) terwijl één op de twee leerlingen $62 - 48$ verkeerd uitrekt. 623 geobserveerde oplossingen van twee optellingen en drie aftrekkingen geven een impressie van hoe deze leerlingen ‘kaal’ optellen en aftrekken.

6.1 Inhoud

Een van de redenen om oplossingswijzen halverwege de basisschool te onderzoeken was dat kale aftrekkingen als $72 - 48$ stelselmatig de grootste hindernis voor leerlingen vormen, terwijl onderzoek aantoonde dat ook minder vaardige leerlingen profijt hebben van de nieuwe aanpak van het rekenen tot 100 (Klein, 1998; Menne, 2001). In dit hoofdstuk worden de resultaten van het kleinschalige onderzoek naar kaal rekenen gerapporteerd.

6.2 Beïnvloedende factoren

Het onderzoek is opgezet op basis van aanwijzingen over drie factoren die hun stempel drukken op hoe leerlingen kaal rekenen, namelijk (1) de moeilijkheidsgraad van kale optellingen en aftrekkingen (c.q. het beheersingsniveau van kaal optellen en aftrekken), (2) de flexibiliteit van de leerling en (3) de aandacht die de leraar aan de mengvorm splitsen-rijgen geeft.

Beheersingsniveau van kaal optellen en aftrekken

De vierde rekenpeiling (Kraemer e.a., 2005) en het normeringsonderzoek van de LOVS-toetsen (Janssen e.a., 2006) geven informatie over de moeilijkheidsgraad van kale optellingen en aftrekkingen.

Optellen

Het gros van de leerlingen uit jaargroep 5 beheerst de meeste kale sommen die met de elementaire vormen van rijgen en splitsen of met de combinatie splitsen-rijgen kunnen worden uitgerekend. Problemen ontstaan bij sommen met tientaloverschrijdingen van het type $34 + 58$. De top van de groep laagst presterende leerlingen (percentiel-33 leerlingen) heeft dergelijke sommen onder de knie. Opgaven als $25 + 19$, $65 + 18$, $35 + 59$ die zich minder lenen voor de standaard hoofdtekenprocedures en meer een beroep doen op handig rekenen worden slechts door de best presterende helft van de leerlingen beheerst. Dit geldt ook voor opgaven als $45 + 55$, $98 + 7$ en $63 + 37$ uit de rekendictees, die de leerling in maximaal zeven seconden bedenktijd uit het hoofd moet uitrekenen.

Aftrekken

Opgaven als $76 - 48$ vormen nog steeds de grootste hindernis. Alleen de 25% best presterende leerlingen uit jaargroep 5 beheersen dit type aftrekkingen. De percentiel-25 leerlingen beheersen pas net aftrekkingen als $60 - 40$, $97 - 70$. Dit geldt ook voor aftrekkingen als $45 - 9$ die via

afronden en compenseren kunnen worden opgelost ($45 - 10$ en 1 erbij). De kans dat een leerling uit de laagste vaardigheidsgroep (onderste 33%) aftrekkingen als $79 - 5$ en $92 - 6$, $60 - 35$ en $75 - 25$ in zeven seconden bedenktijd correct oplost, ligt ten slotte tussen 50% en 80%.

Flexibiliteit van de leerling

Hoe leerlingen hun rekenhandelingen op de contexten en de getallen afstemmen is in hoofdstuk 1 in samengevatte vorm aan de orde geweest. Op grond van deze indicaties kunnen onderstaande reacties op de voorgelegde kale opgaven worden verwacht.

Optellen

De gecontextualiseerde optelling $35 + 19$ van opgave 7 wordt beschouwd als een kale som, omdat leerlingen in de regel geen verschil maken tussen de optelhandelingen van een kale opgave en optellen in situaties waarbij er sprake is van samennemen of erbij doen. 39 ligt dicht bij 40. Daarom lijkt deze opgave sterk op de kale optellingen $54 + 29$ en $54 + 39$ die Klein (1998) gebruikt om de leerling te bewegen de tweede term af te ronden (29 wordt 30 en 39 wordt 40) en deze wijziging met de symmetrische operatie te compenseren (84 eraf 1 en 94 eraf 1):

- $54 + 29$ via $(54 + 30) - 1$ en $54 + 39$ via $(54 + 40) - 1$;
- $35 + 19$ via $(34 + 20) - 1$.

In dit onderzoeksexperiment lossen leerlingen uit jaargroep 4, die volgens de nieuwe realistische aanpak leren rekenen, dergelijke opgaven met de 10-sprong op, zoals ze $57 + 36$ of $16 + 17$ oplossen. Ze veranderen echter van methode in de laatste maanden van het leerjaar en leiden hoe langer hoe vaker de uitkomst af via afronden en compenseren. Leerlingen die met een meer gesloten onderwijsaanpak leren rekenen, blijven daarentegen met sprongen van 10 rijden. Opgave 17 is alleen voorgelegd aan leerlingen uit de groep Hoog. De opgave kan op twee manieren handig worden opgelost:

- via omkeren, afronden en compenseren: $306 + 698 \rightarrow (700 + 306) - 2$;
- via omkeren en veranderen in een gelijkwaardige som: $306 + 698$ is evenveel $700 + 304$.

Er is niets bekend over de oplossing van dergelijke opgaven door leerlingen in jaargroep 5 omdat dit type optellingen pas in jaargroep 6 wordt aangeboden.

Aftrekken

De kale aftrekking van opgave 12 ($62 - 48$) is een van de opgaven die in het onderzoek van Klein is gebruikt om vast te stellen in welke mate leerlingen in de loop van jaargroep 4 aanvullend optellen leren gebruiken als alternatief voor aftrekken. Opgave 10 ($100 - 86$) leent zich ook voor deze aanpak, omdat de afstand tussen beide getallen relatief klein is:

- $62 - 48$ via $48 + 10 = 58$ en $58 + 4 = 62$, dus 14;
- $100 - 86$ via $86 + 10 = 96$ en $96 + 4 = 100$, dus 14.

Gevallen als $62 - 48$ en $72 - 58$ worden niet anders opgelost dan gevallen als $75 - 36$. De meeste leerlingen passen de standaardvorm van rijgend aftrekken toe. Weinig leerlingen vullen aan in plaats van af te trekken. Veel leerlingen doen dat daarentegen wel als ze opgaven als $71 - 69$ of $81 - 79$ uitrekenen. Er zijn ook weinig leerlingen die $62 - 48$ met de procedure van afronden en compenseren oplossen ($62 - 50$ is 12 en 2 erbij is 14), een rekenmanier die vaak wordt toegepast bij kale aftrekkingen als $63 - 29$, waarin de aftrekker dicht bij een tienvoud ligt.

In het onderzoek van Klein zijn geen opgave voorgelegd die op opgave 3 ($60 - 35$) en 10 ($100 - 86$) lijken. De verwachting is dat de meeste leerlingen standaardvormen van rijgend aftrekken zullen gebruiken en dat het aantal splitsoplossingen vrij laag zal zijn, omdat deze hoofdrekenmethode nog niet de volle aandacht krijgt.

Aandacht van de leraar voor de mengvorm splitsen-rijgen

Een belangrijk gegeven uit het onderzoek van Klein is dat leerlingen optelopgaven vaker splitsend dan rijgend uitrekenen, zodra de leraar de splitsmethode heeft geïntroduceerd. In de aanvang-periode van het rekenonderzoek heeft de Leidse onderzoeksgroep geobserveerd dat relatief veel leerlingen uit jaargroep 4 de mengvorm splitsen-rijgen gebruiken en goede resultaten mee bereiken (Beishuizen en Van Mulken, 1988). Dit gegeven nodigt uit om na te gaan hoe vaak deze ‘combinatiemethode’ bij kaal optellen en aftrekken wordt gebruikt:

- $35 + 19$ via $30 + 10 = 40 \rightarrow 40 + 5 = 45$ en $45 + 9 = 54$;
- $62 - 48$ via $60 - 40 = 20 \rightarrow 20 + 2 = 22$ en $22 - 8 = 14$.

6.3 Onderzoeksvragen

- 1 Hoe vaak gebruiken leerlingen uit jaargroep 5 rijgen, splitsen, redeneren en geheugenfeiten bij kaal rekenen en hoe succesvol worden deze hoofdrekenmethoden toegepast?
- 2 Hoe vaak en hoe succesvol gebruiken leerlingen uit jaargroep 5 bij kaal aftrekken *optellen tot* (of *afrekken tot*) als alternatief voor *afrekken*?

6.4 Analyse

Bovenstaande vragen worden op basis van 623 geobserveerde ‘kale berekeningen’ beantwoord. Eerst zijn de gebruiksfrequentie van rijgen, splitsen en redeneren en het behaalde succes van de leerlingen uit de groep Laag, Midden en Hoog op basis van alle 623 berekeningen vastgesteld. Vervolgens zijn de 251 geobserveerde splitsoplossingen van het bestand geanalyseerd om het gebruik van de mengvorm splitsen-rijgen en het bereikte succes vast te stellen.

Ten slotte zijn alle aftrekoplossingen gesorteerd om vast te stellen hoe vaak leerlingen uit jaargroep 5 *optellen tot* (c.q. optelrelaties) als alternatief voor aftrekken gebruiken en of ze hierdoor vaker de juiste uitkomst vinden.

De gebruiksfrequentie wordt, ondanks de kleine aantallen, in percentages uitgedrukt om op het oog te kunnen vergelijken.

6.5 Resultaten

Gebruiksfrequentie van rijgen, splitsen en redeneren bij kaal optellen

Figuur 6.1 laat de gebruiksfrequentie en het succes van rijgen, splitsen en redeneren bij kaal optellen zien.

Figuur 6.1 Gebruiksfrequentie en succes van rijgen, splitsen en redeneren bij kaal optellen

Groep	Rijgen		Splitsen		Redeneren		Rest		Totaal in %
	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	
Opgave 7: 35 + 19									
Laag (88 leerlingen)	43	82	47	78	3	100	7	17	100
Midden (91 leerlingen)	29	85	64	95	5	100	2	50	100
Opgave 15: 306 + 698									
Hoog (88 leerlingen)	23	76	68	79	4	100	4	25	100

Deze resultaten geven onderstaande aanwijzingen.

35 + 19 in de groepen Laag en Midden

Leerlingen uit de groepen Laag en Midden hebben opgave 35 + 19 uitgerekend. Leerlingen uit de middengroep passen beduidend minder vaak de rijgmethode toe en beduidend vaker de splitsmethode dan hun klasgenoten uit de groep Laag. Beide groepen zijn even vaardig in het rijgen (ongeveer 83% goed). Maar leerlingen uit de middengroep zijn bij het splitsen veel succesvoller dan hun klasgenoten uit de groep Laag (95% goed tegen 78% goed). In beide groepen wordt er bij uitzondering afgeleid. De betreffende leerlingen vinden wel allemaal de juiste uitkomst.

306 + 698 in de groep Hoog

Deze opgave wordt in bijna 70% van de kale berekeningen splitsend uitgerekend. In vrijwel alle overige oplossingen wordt een rijgprocedure toegepast (23%). Dit gebruikspatroon wijkt behoorlijk af van het gebruikspatroon dat op basis van alle rekenoplossingen is vastgesteld. Er wordt bij deze optelling veel vaker gesplitst dan in het hele bestand (68% tegen 18%) en veel minder vaak geregen (23% tegen 67%). Het succes bij splitsen is ook veel hoger (79% tegen 68%) en het succes bij rijgen veel lager (76% tegen 91%) (zie tabel 3.1).

Gebruiksfrequentie van rijgen, splitsen en redeneren bij kaal aftrekken

Figuur 6.2 laat de gebruiksfrequentie en het succes van rijgen, splitsen en redeneren bij kaal aftrekken zien.

Figuur 6.2 Gebruiksfrequentie en succes van rijgen, splitsen en redeneren bij kaal aftrekken

Groep	Rijgen		Splitsen		Redeneren		Rest		Totaal in %
	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	
Opgave 4: 60 – 35									
Laag (88 leerlingen)	82	86	6	20	6	20	7	0	100
Opgave 15: 306 + 698									
Hoog (88 leerlingen)	83	82	7	33	6	40	5	50	100
Opgave 12: 62 – 48									
Midden (87 leerlingen)	33	90	61	45	0	nvt	6	0	100
Hoog (90 leerlingen)	53	94	41	70	6	80	0	nvt	100

Deze resultaten worden hierna per opgave en per vaardigheidsniveau uitgewerkt.

60 – 35 in de groep Laag

Rijgen wordt opvallend vaak gebruikt (82%) en levert ook opvallend vaak de juiste uitkomst op (86% goed). Deze kale aftrekking sluit blijkbaar goed aan bij de beschikbare rijgvaardigheid van het gros van deze groep leerlingen.

In de resterende oplossingen wordt even vaak gesplitst, afgeleid of een restoplossing gebruikt. Splitsen noch redeneren zijn effectief. In beide categorieën oplossingen is slechts 1 op de 5 uitkomsten correct.

100 – 86 en 62 – 48 in de groep Midden

Zeer opvallend is het verschil in de gebruiksfrequentie tussen rijgen en splitsen:

- 100 – 86 wordt in acht op de tien oplossingen rijgend opgelost, 62 – 48 in slechts één op de drie;
- 62 – 48 wordt in zes van de tien oplossingen splitsend uitgerekend, 100 – 86 in slechts zeven van de honderd.

Het succes varieert ook vrij sterk. Het valt op dat de toegepaste rijgprocedures meer correcte uitkomsten opleveren bij 62 – 48 dan bij 100 – 86 (90% tegen 82%), terwijl 100 – 86, statistisch gezien, gemakkelijker is dan 62 – 48 (P67 tegen P54). 5 van de 88 leerlingen (6%) lossen 100 – 86 redenerend op, terwijl niemand 62 – 48 op deze manier uitrekent.

62 – 48 in de groepen Midden en Hoog

Leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep rekenen 62 – 48 anders uit dan leerlingen uit de middengroep. Ruim de helft van de leerlingen uit de groep Hoog rijgt, tegen één op de drie in de middengroep. Het aantal splitsoplossingen is veel lager (41% tegen 61%) en 5 van de 90 leerlingen leiden de uitkomst af.

Gebruiksfrequentie van de mengvorm splitsen-rijgen en bereikte succes

Leerlingen hebben de mengvorm splitsen-rijgen in drie van de vijf opgaven toegepast: opgave 7, 15 (optellen) en opgave 12 (aftrekken). De resultaten, die in figuur 6.3 zijn weergegeven, geven aan dat de gebruiksfrequentie en het succes sterk variëren.

Figuur 6.3 Gebruiksfrequentie en succes van de combinatie splitsen-rijgen bij kaal rekenen

Frequentie	Opgaven	Combinatie		Overige		Totaal in %
		Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	
Kaal optellen						
Laag (41 leerlingen)	(7) 35 + 19	44	89	56	70	100
Midden (58 leerlingen)		29	94	71	95	100
Hoog (62 leerlingen)		(15) 306 + 398	52	81	48	77
Kaal aftrekken						
Midden (53 leerlingen)	(12) 62 – 48	53	50	47	40	100
Hoog (37 leerlingen)		46	71	54	70	100

35 + 19 in de groepen Laag en Midden

Opmerkelijk is dat bijna de helft van de leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep die een splits-procedure toepast dit splitsen met rijgen combineert en dat deze leerlingen succesvoller zijn dan de andere helft van de groep die op een andere manier splitst (89% goed tegen 70% goed). De meeste leerlingen uit de middengroep passen andere splitsprocedures toe (71% tegen 29% splitsen-rijgen). In beide categorieën oplossingen is ongeveer 95% van de uitkomsten correct. Uit deze resultaten kan worden geconcludeerd dat het loont om 35 + 19 splitsend uit te rekenen.

306 + 698 in de groep Hoog

De ene helft van de leerlingen die de optelling splitsend uitrekent, gebruikt de combinatie splitsen-rijgen, de andere helft andere splitsprocedures. Het succes schommelt rond de 80%. Dit is opmerkelijk hoog, omdat dergelijke sommen op de meeste scholen nog niet zijn behandeld.

62 – 48 in de groepen Midden en Hoog

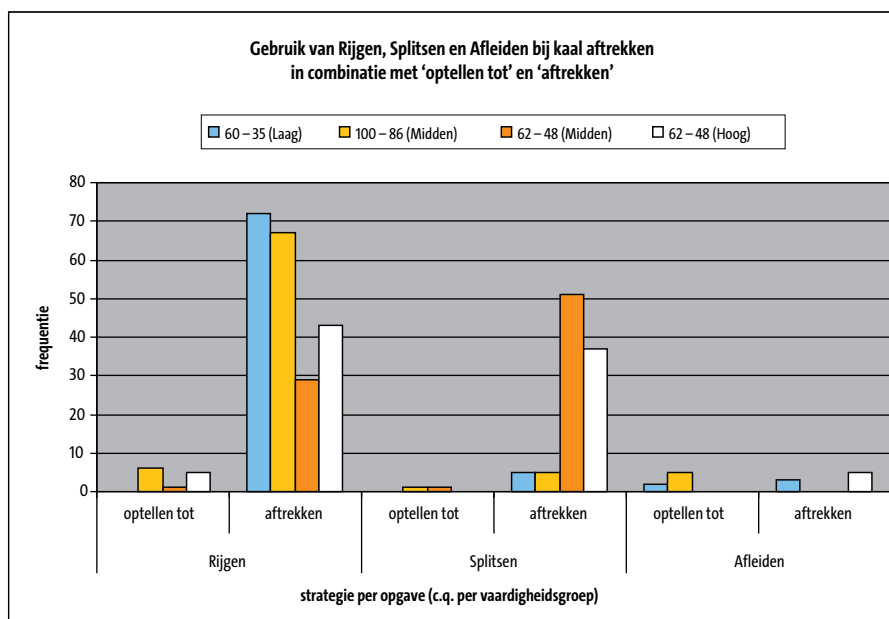
Beide groepen splitsen volgens hetzelfde gebruikspatroon, maar leerlingen uit de groep Hoog zijn beduidend succesvoller dan hun klasgenoten uit de middengroep. Leerlingen uit de middengroep vinden vaker correcte antwoorden met de combinatie splitsen-rijgen dan met andere splits-procedures (50% goed tegen 40% goed).

Dit alles overziende kan worden gesteld dat de mengprocedure splitsen-rijgen bij kaal optellen loont, maar dat deze manier van aftrekken voorlopig geen alternatief lijkt te zijn voor rijgend aftrekken.

Gebruik van aanvullend optellen (optellen tot) als alternatief voor rijgend aftrekken

Leerlingen kunnen drie aftrekstrategieën toepassen: aftrekken, optellen tot (aanvullend optellen) of aftrekken tot (terugrekenen). In twee oplossingen van de groep Hoog is 62 – 48 aftrekkend tot gerekend. Deze oplossingen zijn – als overbruggingsstrategie – samengenomen met de oplossingen waarin de leerling aanvullend heeft opgeteld (optellen tot). In figuur 6.5 staat een overzicht van de gebruiksfrequentie van deze twee strategieën.

Figuur 6.5 Rijen, splitsen en redeneren in combinatie met ‘optellen tot’ en ‘aftrekken’ bij kaal aftrekken



Uit deze cijfers zijn de volgende zaken af te leiden over de combinatie van rijen, splitsen en redeneren met respectievelijk *optellen tot* (c.q. *afrekken tot*) en *afrekken* bij kaal aftrekken.

Groep Laag

72 van de 82 leerlingen uit de groep Laag hebben 60 – 35 rijgend aftrekkend opgelost. De aftrekstrategie is ook gevolgd door de vijf leerlingen die hebben gesplitst. De getallen van deze kale opgave lokken blijkbaar aftrekken uit.

Groep Midden

Leerlingen uit de middengroep gebruiken ook vooral de strategie aftrekken, afgezien van de vijf leerlingen die de uitkomst van 100 – 86 optellend beredeneren. De meest opvallende observatie is, zoals eerder opgemerkt, dat 100 – 86 vooral rijgend wordt uitgerekend en 62 – 48 vooral splitsend, in beide gevallen vooral in combinatie met aftrekken. Ook voor de middengroep geldt, concluderend, dat kale aftrekkingen aftrekhandelingen aantrekken.

Groep Hoog

In de groep Hoog is ten slotte in 85 van de 90 geobserveerde berekeningen de aftrekstrategie toegepast. Wat opvalt in vergelijking met de middengroep is dat de leerlingen uit de groep Hoog 62 – 48 vaker rijgend dan splitsend uitrekenen.

Succes bij het gebruik van aanvullend optellen bij kaal aftrekken

Er zijn te weinig oplossingen van het type aanvullend optellen geobserveerd om vast te kunnen stellen of leerlingen vaardiger zijn als ze aanvullend optellen in plaats van af te trekken. De resultaten in de groepen Midden en Hoog tonen hoe dan ook aan dat aanvullend rijgend loont.

6.6 Aandachtspunten

Bovenstaande resultaten geven beperkte aanwijzingen over het gebruik en de vaardigheid van de leerlingen in het rijgen, splitsen en redeneren bij kaal optellen en aftrekken. Daarmee worden er drie onderwerpen aangesneden die in de hierna volgende hoofdstukken in andere analyses weer aan de orde zullen komen:

- het geringe gebruik van afronden en compenseren in optelsituaties die zich daarvoor lenen;
- flexibel rijgen op basis van drie aftrekstrategieën;
- de wisselende effectiviteit van de mengvorm splitsen-rijgen.

Gering gebruik van redeneren

$35 + 19$ en $306 + 698$ zijn opgaven die in het onderwijs worden gebruikt om flexibel optellen uit te lokken. Dat zo weinig leerlingen uit de middengroep $35 + 19$ via $35 + 20$ uitrekenen is dan ook zeer opmerkelijk, omdat de redenering én de optelling zo simpel zijn. Het is eigenlijk onbegrijpelijk dat de uitkomst van $35 + 19$ in de middengroep in slechts 5% van de oplossingen wordt beredeneerd en dat de splitsmethode in twee derde deel van de oplossingen wordt toegepast. Het is om dezelfde redenen even opmerkelijk dat zo weinig leerlingen uit de groep Hoog $306 + 698$ via $(306 + 700) - 2$ of via $304 + 700$ oplossen en dat er in 7 van de 10 oplossingen wordt gesplitst. Het roept de vraag op of de onderwijsmethoden en/of de leraren wel voldoende aandacht besteden aan de elementaire vormen van handig rekenen, inspelend op wat leerlingen uit verschillende vaardigheidsgroepen in hun mars hebben. Dit geldt overigens ook voor de oplossingen van aftrekopgaven als $60 - 35$ en $62 - 48$. Het gros van de leerlingen uit jaargroep 5 kan in principe $60 - 35$ direct uit $2 \times 30 = 60$ afleiden (het is 5 minder dan 30), net zoals de meeste van de leerlingen uit de hoogste vaardigheids-groep $62 - 48$ met $64 - 50$ en dus 14 kunnen associëren.

Flexibel rijgen op basis van de drie aftrekstrategieën

Het meest opmerkelijke in de rijgoplossingen van de drie kale opgaven is dat aanvullend optellen zo weinig wordt gebruikt, terwijl deze strategie zoveel aandacht in het onderwijs krijgt. De oplossingen van opgave 12 bevestigen het signaal uit het vorige hoofdstuk dat leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep meer geneigd zijn te rijgen dan leerlingen uit de middengroep. Ze blijken ook vaker gebruik te maken van de overbruggingstrategieën (*optellen tot of aftrekken tot*) als alternatief voor aftrekken. In het deel 3 *Over rijgend aftrekken* van dit rapport wordt verslag gedaan van het nader onderzoek naar dit verband tussen flexibel rijgen en het vaardigheidsniveau van de leerling.

Wisselend succes bij de toepassing van de mengvorm splitsen-rijgen

Een opvallende uitkomst is dat de mengvorm splitsen-rijgen relatief vaak en met wisselende resultaten wordt gebruikt, terwijl deze manier van optellen en aftrekken de laatste jaren geen onderwerp van discussie is geweest.

De oplossingen van opgave $35 + 19$ en $306 + 698$ suggereren dat leerlingen uit jaargroep 5 vlot en inzichtelijk met deze mengvorm van splitsen en rijgen kunnen hoofdrekenen. De oplossingen van $62 - 48$ tonen daarentegen aan dat de aftrekprocedures geen alternatief vormen voor rijgend aftrekken. Rekenaars uit de middengroep vergissen zich in één op de twee oplossingen en in de groep meest vaardige leerlingen is het succes niet hoger dan 70%.

Impressies van kaal aftrekken

Opgave 10 (Midden)

Rijgen

Aftrekken

$100 - 80 = 20$; nog 6 af is 14; dat weet ik gewoon

Aanvullend optellen

- 14. Eerst tel ik van 6, 4 bij is 90, dan 10 is 100
- $86 + 4 = 90$; $90 + 10 = 100$

Splitsen

$8 - 10 = 2$ (8 van de 10 aftrekken) is al 20.

$6 - 10 = 4$ (6 van de 10 aftrekken) is dus 14

Waarschijnlijk: $86 + ? = 100$ via

$6 + 4 = 10$; de 10 bij de 8 (80) optellen is 100

Foutieve procedure

$10 - 6 = 4$, dat is het kleinste getal (trekt de 6 eenheden af)

$10 - 8 = 2$ (trekt de tientallen af) zodat het een heel stuk makkelijker wordt. Dan hou je 24 over.

Beredeneren

86 erbij 14 = 100

$80 + 10$ en $6 + 4$ is samen 100

Opgave 4 (Laag)

Rijgen

60 – 35 op de vingers... 60 – 59 – 58 – 57 – 56 ... wacht effe, opnieuw. Begint opnieuw terug te tellen 60..... 51/40 nee. 50 – 49 – 48 – 47 – 46 – 45 – 44 – 43 – 42 – 41 – 40/30 – 29 – 28 – 27 – 26 – 25. Ik doe er steeds 10 eraf, voor de zekerheid. Van de meester moet het met tientallen. Dat moet niet maar dat gaat sneller. Voor de zekerheid doe ik dat niet. Ik onthoud dat goed ... In mijn hoofd.

Gebruik van dubbel 30

- 60 er van af 30; nog 5 eraf.

25 is het antwoord

Eerst 60 – 30 dat is 30. Dan doe je 30 eraf 5 dat is 25

Eigen foutieve notatie

$60 - 30 = 30 - 5 = 25$

Foutief

$60 - 30 = 30$; $30 + 5 = 35$

Foutief

60 – 30 is 60, 50, 40, 30; erbij 5 is 35.

Splitsen

Cijfers uit het hoofd

0 – 5 kan niet; 1 van de 6 lenen,

$10 - 5 = 5$; $5 - 3 = 2$, dus 25

Beredeneren

Puzzelen met relaties

25, want $5 + 5 = 10$

en daar is 3 van (wijst de 3 aan)

en $30 + 30 = 60$ en dan nog 5 = 25

Foutieve omkering

$6 - 3 = 3$; $0 - 5 = 5$; $3 + 5 = 53$ Wachten. Ja! 35!

Misconceptie

$60 - 3$. Nee! $6 - 3 = 3$

Blijft 5 over, dus 35

Foutief

35? Ik doe er 30 vanaf, is $35 - 5 = 30$

Verkeerd compenseren

$60 - 30$ en dan doe ik die 5 er weer bij

Opgave 12 (Midden en Hoog)

Rijgen

Met sprongen van tien, eerst zonder de eenheden

$60 - 40 = 50, 40, 30$, is 20;
 $62 - 40 = 22 \rightarrow 22 - 8$ is 21, 20, 19, 18, 17, 16, 15, 14
 (op de vingers). Dus 14.

Algoritmisch

- $62 - 40 = 22$ (kijkt omhoog)
- $22 - 8$ (hoe doe je dat?). $22 - 4 = 18$ (telt terug);
 nog een keer min 4 is 14]
- Eerst doe ik $62 - 40 = 22$, en dan doe ik 2 eraf en
 dat is dan 20 en dan doe ik nog 6 eraf en dat is 14
- $62 - 8 - 40$ is 14

Rekenfout

Eerst de eenheden aftrekken, dan pas de tienvouden

$62 - 2 = 60$; dan moet je van die 8 aftrekken, dan
 hoeft je er nog maar 6 af te doen en dan moet je bij
 die 60 er nog 40 aftrekken; dat is dan 20 en dan
 moet je er nog 6 aftrekken, dan heeft ie er 13.

Splitsen

Mengvorm

60 eraf 40 is 20; 2 erbij is 22; eerst 2 er vanaf
 (van de 8) en dan nog 6 ervan af is 14

Informeel vorm van lenen

40 af die $60 = 20$
 8 af die 2, kan niet; moet je niet 20 maar 10;
 10 af die 20 en 2 eraf 8 is 14

Splitsen met tekort

$60 - 40 = 20$; $8 - 2 = 6$; $20 - 6 = 14$

Correcte uitkomst maar foutieve notatie

$62 - 40 = 20$ is $22 - 2 = 20 - 6 = 14$

Foutief

Eerst 40 eraf 60 halen is 20; min 8 is 12, min 2 is 10

Misconceptie

Eerst $60 - 40 = 20$; 2 erbij 8 is 10 dan min 10 is 10

Beredeneren

Principe van het gelijke verschil:

$62 - 48$ is evenveel als $60 - 46$

$8 - 2 = 6$, dus als ik min 2 doe, dan hoeft ik nog
 maar min 46 te doen

Foutieve redenering bij de toepassing van het principe van het gelijke verschil

Bij die 62 haal ik er eerst 2 af dan heb je 60, dus
 dan is het nog maar: min 46. Bij die 60 haal je 40
 eraf, dat is dan 20, dan heb je er al 42 afgehaald.
 Het was net nog 46, dus nu is het nog 6, dan heb
 je nu dus 40 maar dan moet je er nog 5 afhalen,
 dus dat is 35. Dan nog 1 eraf dan is dat 34.

Puzzelen met getalstructuren

$60 - 40 = 20$

$60 - 50$

$12 - 4 = 8$

$62 - 48 = 14$

Over rijgend aftrekken

- 7 Flexibel rijgen: de elementaire vorm van flexibel hoofdrekenen
- 8 Standaardisering van aftrekprocedures onder de honderd
- 9 Minder rijgfouten met pen en papier

7 Flexibel rijgen: de elementaire vorm van flexibel hoofdrekenen

De analyse van 1231 geobserveerde rijgoplossingen laat zien dat leerlingen uit de vaardigheidsgroepen Laag, Midden en Hoog een eigen stijl van flexibel aftrekken hebben ontwikkeld, die gebaseerd is op het gebruik van maximaal negen vaste rekenschema's.

Deze schema's ontstaan uit de koppeling van drie alternatieve aftrekstrategieën: (1) aftrekken, (2) optellen tot en (3) aftrekken tot in combinatie met met drie typen rijgprocedures: (A) rekenen via een tienvoud, (B) rekenen met tienvouden en (C) eerst de eenheden bewerken.

7.1 Inhoud

In dit hoofdstuk wordt verslag gedaan van het kleinschalige onderzoek naar de strategieën en procedures die de leerlingen uit de vaardigheidsgroepen Laag, Midden en Hoog hebben gebruikt bij het oplossen van de voorgelegde aftrekproblemen en kale aftrekkingen. Dit onderzoek bouwt voort op wat in het laatste decennium van de vorige eeuw is ondernomen om te begrijpen hoe leerlingen rijgend aftrekken.

7.2 Onderzochte strategieën en procedures

Onderzoek naar de wijze waarop leerlingen leren aftrekken (De Corte en Verschaffel, 1984; 1985; 1987; Beishuizen, 1983; 1985; Beishuizen & van Mulken, 1988; Fuson, 1992; Van den Heiden, 1993; Klein, 1994) heeft tot nu toe een zestal aanwijzingen opgeleverd:

1. Onderbouwleerlingen pakken uit zichzelf aftreksituaties verschillend aan en stemmen hun rekenhandelingen af op de wijze waarop ze de situatie in kaart hebben gebracht.
2. Onderbouwleerlingen veranderen in de loop van jaargroep 4 hun oorspronkelijke vormen van tellend aftrekken in overeenkomstige vormen van verkort tellen en vervolgens rijgen.
3. Zeker tot eind jaargroep 4 laten leerlingen zich sterk door de context van de opgaven leiden. De uitgevoerde tel- en rijghandelingen beschrijven 'letterlijk' wat er in de betreffende situatie gebeurt of hoe de betreffende hoeveelheden (of grootheden) met elkaar in verband staan.
4. Leerlingen nemen echter hoe langer hoe meer afstand van de context. Ze stemmen geleidelijk aan hun rekenhandelingen vaker af op de getallen van de aftrekopgaven, vooral in situaties waar een verschil moet worden uitgerekend (Beishuizen, 1997; Klein, 1994). Ze overbruggen de afstand of trekken af, al dan niet via afronden en compenseren of ze redeneren op basis van de inverse relatie tussen optellen en aftrekken:
 - 'Optellen tot' via compenseren: $75 \# 91$ via $75 + ? = 91$: (75), 85, 95; 4 te ver, dus erbij 16;
 - 'Aftrekken tot': $82 \# 68$, via $82 - ? = 68$: (82), 72, nog 4 eraf is 68; het verschil is dan 14;
 - Aftrekken: $75 \# 17$, via $75 - 17$: $75 - 10 = 65$ en $65 - 7 = 58$;
 - Aftrekken via compenseren: $73 \# 29$, via $73 - 29$: $73 - 30 = 43$ en 1 erbij is 44;
 - Redeneren: $68 \# 65$, - 3 want $65 + 3 = 68$.

- 5 Twee rijgprocedures worden voornamelijk gebruikt: springen naar het dichtstbijzijnde tienvoud en springen met sprongen van 10.
- 6 Het gebruik van de 10-sprong in combinatie met de strategieën *afrekken*, *optellen tot* en *afrekken tot* leidt vaker tot een juiste uitkomst dan splitsen in combinatie met een van deze drie strategieën.

Uitgaande van deze aanwijzingen hebben we drie aspecten van de rijghandelingen van de onderzoeksgroep vanuit drie invalshoeken doorgelicht: de aanpak van de aftrekopgave (aftrekstrategie), de toegepaste rijgprocedures én de samenhang tussen de gebruikte strategie en procedure.

7.3 Aftrekstrategieën

Onderzoeksvragen

- 1 Hoe systematisch stemmen leerlingen hun aftrekstrategie af op de context?
- 2 Welke indicatie geeft de variatie in het gebruik van *afrekken*, *optellen tot* en *afrekken tot* over de interactie tussen de context en de getallen?
- 3 Hoe sterk varieert het aantal correcte antwoorden afhankelijk van de gebruikte aftrekstrategie?
- 4 In welke mate hangt de gebruiksfrequentie van de aftrekstrategieën samen met het vaardigheidsniveau van de leerling?

Analyse

De geobserveerde oplossingen zijn geanalyseerd vanuit het uitgangspunt dat opgavenkenmerken én het vaardigheidsniveau van de leerling zijn aanpak van aftrekopgaven beïnvloeden. Leerlingen ontdekken in de loop van jaargroep 4 en 5 dat ze elk willekeurig aftrekprobleem met aftrekhandelingen of via een optelsom kunnen uitrekenen. Flexibel rijgen is in dit inzicht verankerd.

Figuur 7.1 De drie alternatieve aanpakken van de voorgelegde aftrekopgaven

Opgaven	Betekenis van aftrekken	Aftrekstrategieën		
		Aftrekken	Overbruggen tot	
			Optellen tot	Aftrekken tot
1	Aanvullen	$25 - 12 = ?$	$12 + ? = 25$	$25 - ? = 12$
5		$36 - 25 = ?$	$25 + ? = 36$	$36 - ? = 25$
8		$50 - 32 = ?$	$32 + ? = 50$	$50 - ? = 32$
11		$102 - 90 = ?$	$90 + ? = 102$	$102 - ? = 90$
17		$1662 - 998 = ?$	$998 + ? = 1662$	$1662 - ? = 998$
2	Verschil bepalen	$22 - 18 = ?$	$18 + ? = 22$	$22 - ? = 18$
6		$40 - 24 = ?$	$24 + ? = 40$	$40 - ? = 24$
13		$250 - 189 = ?$	$189 + ? = 250$	$250 - ? = 189$
3	Part bepalen	$50 - 25 = ?$	$25 + ? = 50$	$50 - ? = 25$
9		$100 - 48 = ?$	$48 + ? = 100$	$100 - ? = 48$
14		$620 - 370 = ?$	$370 + ? = 620$	$620 - ? = 370$
4 (kaal)	Afhalen	$60 - 35 = ?$	$35 + ? = 65$	$65 - ? = 35$
10 (kaal)		$100 - 86 = ?$	$86 + ? = 100$	$100 - ? = 86$
12 (kaal)		$62 - 48 = ?$	$48 + ? = 62$	$62 - ? = 48$
16		$900 - 595 = ?$	$595 + ? = 900$	$600 - ? = 595$

De vraagtekens in figuur 7.1 symboliseren de drie manieren waarop de leerlingen de voorgelegde opgaven konden aanpakken. We nemen opgave 6 als voorbeeld. Ze konden het verschil in prijs via de aftrekking $40 - 24$ uitrekenen (*afrekken*), via de optelling $24 + ? = 40$ (*optellen tot*) of, in de omgekeerde rekenrichting, via de aftrekking $40 - ? = 24$ (*afrekken tot*).

De opgaven zijn in de tabel geordend op grond van de betekenis van afrekken in de betreffende context: *aanvullen*, *verschil bepalen*, *part bepalen* of *afhalen*. De in vet gedrukte vraagtekensommen geven aan hoe leerlingen dit type afrekkingen in de regel zullen aanpakken, bijvoorbeeld:

- **$25 + ? = 36$** (*optellen tot*) bij opgave 5,
- **$24 + ? = 40$** én **$40 - ? = 24$** (*optellen tot* of *afrekken tot*) bij opgave 6;
- **$62 - 48 = ?$** (*afrekken*) bij opgave 12.

Er wordt geen voorspelling gedaan over de afrekstrategie bij ‘Part bepalen’, omdat er geen gegevens beschikbaar zijn over de richting en de mate waarin een dergelijke context het rekengedrag van middenbouwleerlingen beïnvloedt. Rekenkundig gezien zou een leerling het onbekende part van een opgave kunnen uitrekenen net zoals hij een verschil uitrekent (zie opgave 3, 9 en 14 in figuur 7.1).

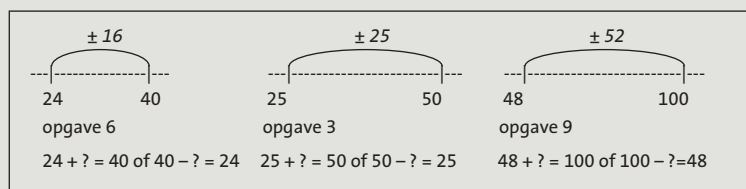
Onderzoek heeft echter ook uitgewezen dat leerlingen uit jaargroep 4 (5) de context bewust negeren, als de getallen van de rekensituatie zich lenen voor een bewerking die gemakkelijker is dan de standaardberekening of die ze, zonder na te denken, kunnen uitvoeren. De getallen én de rekenvaardigheid van de leerling beïnvloeden in die zin mede de aanpak van afrekopgaven. We expliciteren nu de verwachte invloed van de context, de getallen en het vaardigheidsniveau, alvorens de resultaten van de analyse te presenteren.

Invloed van de context

Aanvullen en verschil bepalen. De context van opgaven waar afrekken de betekenis heeft van aanvullen (1, 5, 8, 11 en 17) lokt in de regel optellen tot uit, omdat leerlingen aanvullen als een vorm van optellen beschouwen (Fuson, 1992).

Een context waarin het verschil bepaald moet worden tussen twee hoeveelheden of twee meetgetallen, lokt alle drie de strategieën uit. Toch passen leerlingen van jaargroep 4 vaker één van de twee overbruggingsstrategieën toe, omdat ze liever optellen dan afrekken. Om diezelfde reden passen ze in een dergelijke context eerder optellen tot toe dan afrekken tot, zelfs als de vraagstelling in de opgave expliciet aanstuurt op afrekken tot, zoals bij opgave 2 (*Hoeveel kilo lichter?*) en opgave 6 (*Hoeveel euro goedkoper?*). Als louter naar het verschil wordt gevraagd, zonder nadere toelichting, wordt in de regel de optelstrategie gevolgd, bijvoorbeeld om het verschil in hoogte tussen de toren van 189 meter en die van 250 meter uit te rekenen (opgave 13).

Figuur 7.2 Overbruggingsstrategie bij opgave 6, 3 en 9



Afhalen. Een context waarin aftrekken de betekenis heeft van afhalen lokt in de regel aftrekhandelingen uit. Er is slechts één opgave van dit type voorgelegd, opgave 16 in de groep Hoog. De getallen van deze opgave zijn echter bewust gekozen om vast te stellen of deze leerlingen toch liever aanvullend optellen, omdat de rekenhandelingen dan gemakkelijker zijn. Dit verkleint de kans dat veel leerlingen bij deze opgave de aftrekstrategie volgen (zie *Invloed van de getallen* hieronder).

Welke strategie de kale aftrekkingen uitlokt, is in hoofdstuk 6 gerapporteerd. In het merendeel van de oplossingen volgt de leerling de aftrekstrategie.

'Part bepalen'. Er zijn geen eenduidige aanwijzingen over de strategie die leerlingen volgen als ze een part van een samengestelde hoeveelheid of grootte moeten uitrekenen. De aftrekstructuur van de drie voorgelegde opgaven van dit type (opgave 3, 9 en 17) lijkt sterk op die van de voorgelegde 'verschilopgaven'. We gaan er daarom vanuit dat leerlingen beide typen problemen volgens dezelfde systematiek zullen aanpakken.

Invloed van de getallen

We weten uit onderzoek dat leerlingen uit jaargroep 4 (5) (nog) sterk in de lijn van de context rekenen, maar dat ze ook regelmatig de getallen van de rekensituaties anders bewerken dan volgens hun standaardaanpak, omdat de rekenhandelingen dan gemakkelijker zijn. We verwachten dus 'afwijkende' aanpakken die door de getallen worden uitgelokt. We beschrijven die hieronder.

Aanvullend optellen in de context van afhalen. De analyse van de oplossingen van de kale aftrekkingen heeft uitgewezen dat enkele leerlingen uit de groep Midden de aftrekking $100 - 86$ aanvullend optellend uitrekenen: $86 + ? = 100$ via $(86) \rightarrow 96, 100$, dus 14. Enkele leerlingen uit de groep Hoog volgen dezelfde strategie om $62 - 48$ uit te rekenen: $(48) \rightarrow 58, 62$, dus 14. Leerlingen die bij opgave 16 de prijs van de fiets (€ 595,-) direct met € 600,- associëren zouden ook afwijkend op deze 'afhaalcontext' kunnen reageren, door van 595 tot 900 op te tellen: $(595) \rightarrow 600, 900$, samen 305.

Aftrekken in plaats van aanvullend optellen. Geheugenfeiten en/of verworven vaardigheden kunnen, omgekeerd, leerlingen uit jaargroep 5 aansporen om 'optelcontexten' aftrekkend op te lossen. Het geheugenfeit $40 - 20 = 20$ kan in die zin de oplossing $40 - 24$ bij opgave 6 uitlokken, zoals de automatisering van $50 - 30 = 20$ en $36 - 20 = 16$ de aftrekoplossing $36 - 25$ bij opgave 5 en $50 - 32$ bij opgave 8 kunnen uitlokken.

Invloed van het vaardigheidsniveau

De rekendictees van de PPON- en LOVS-toetsen tonen dat leerlingen die een hogere vaardigheid hebben meer rekenfeiten hebben memoriseerd, meer basisoperaties hebben geautomatiseerd en ook vaker de relatie tussen feiten en operaties gebruiken (zie paragraaf *Vaardigheidsniveau van de leerlingen* op pagina 51). In die zin beïnvloedt het vaardigheidsniveau van de leerling mede de aanpak van aftrekproblemen.

Er zijn te weinig oplossingen van gemeenschappelijke opgaven beschikbaar om de invloed van dit vaardigheidsniveau statistisch te kunnen onderzoeken. We zoeken dan ook slechts aanwijzingen op basis van de analyse van de aanpak van de drie gebruikte sets ankeropgaven:

- de ankeropgaven die de leerlingen uit de groepen Laag en Midden hebben gemaakt;
- de ankeropgaven die de leerlingen uit de groepen Midden en Hoog hebben gemaakt;
- opgave 6, 9 en 11 die leerlingen uit alle drie de vaardigheidsgroepen hebben gemaakt.

Resultaten

1 Hoe systematisch stemmen leerlingen hun aftrekstrategie af op de context?

De gebruiksfrequentie van de drie aftrekstrategieën is in figuur 7.3 weergegeven.

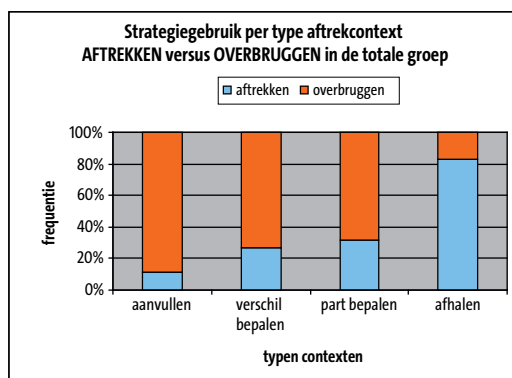
Figuur 7.3 Gebruiksfrequentie van de drie aftrekstrategieën in de onderzoeksgroep

Vaardigheidsgroep	Aftrekken	Optellen tot	Aftrekken tot	Totaal
Laag	119	214	25	358
Midden	180	200	22	402
Hoog	128	319	24	471
Totaal	427	733	71	1231

De voorgelegde opgaven lokken in 733 van de 1231 geobserveerde oplossingen de strategie optellen tot uit. 60% van alle rijgoplossingen nemen dus de vorm aan van aanvullend optellen. Aftrekken wordt in 35% van de oplossingen toegepast (427 van 1231 oplossingen) en aftrekken tot in de resterende 6% (71 van 1.231 oplossingen). Dit betekent dat de leerlingen strategisch aftrekken, in die zin dat ze gebruikmaken van de drie geleerde aftrekstrategieën.

Uit figuur 7.4 blijkt dat de rijgoplossingen een duidelijke tendens laten zien in de gebruiksfrequentie van *Aftrekken* en *Overbruggen*.

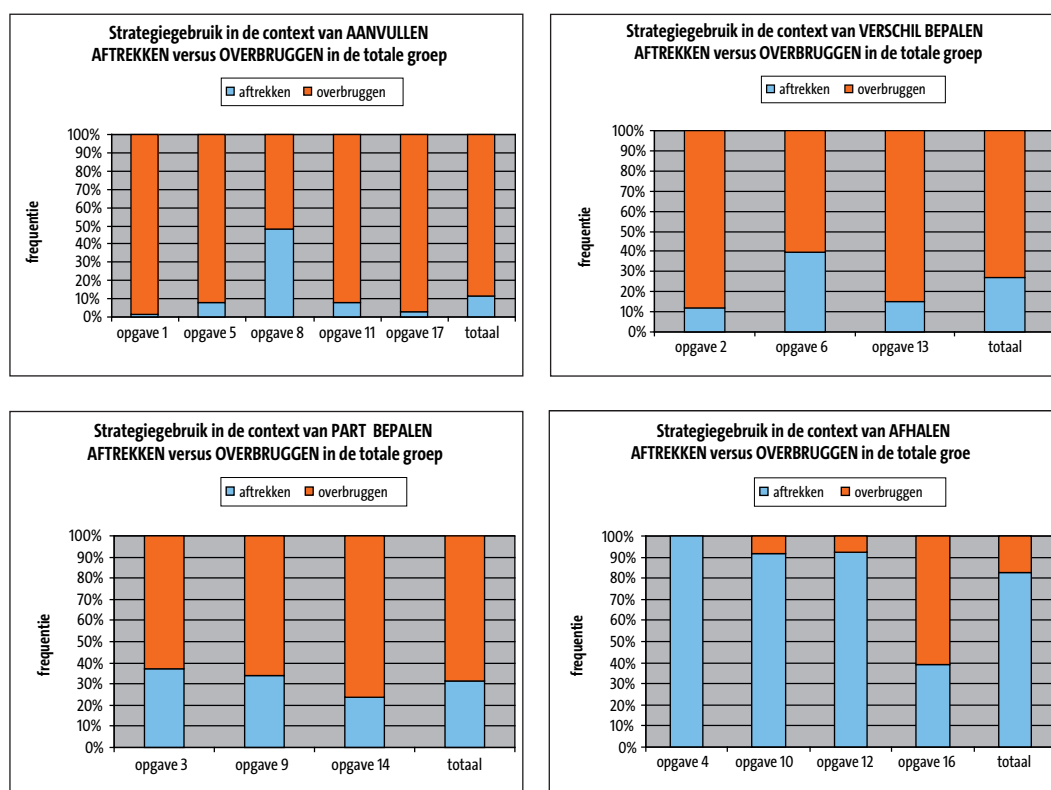
Figuur 7.4 Invloed van de context op de gebruiksfrequentie van aftrekken en overbruggen



Er tekent zich een tweedeling af. Contextproblemen en opgaven waarbij er sprake is van aanvullen of het bepalen van een verschil of een part worden eerder via een overbruggingsstrategie (optellen tot of aftrekken tot) benaderd. De opgaven waar aftrekken zich voordoet in de context van kale aftrekking of afhalen worden opgelost via de aftrekstrategie.

Figuur 7.5 toont de variatie in strategiegebruik bij de vier onderscheiden contexttypen. De beschikbare strategieën worden in de voorgelegde contexten als volgt gebruikt.

Figuur 7.5 Variatie in de invloed van de context per type opgave



Aanvullen. Op opgave 8 na lokken alle opgaven sterk de overbruggingsstrategie uit. Het is zeer opmerkelijk dat zoveel leerlingen deze opgave aftrekkend oplossen, omdat dit type probleem in de schoolboeken specifiek worden gebruikt om de strategie van optellen tot te leren gebruiken – de zogenoemde winkelmethode. Een verklaring is dat de aftrekhandelingen in dit geval erg simpel zijn: $50 - 32$ via $50 - 30 = 20$ (want $5 - 3 = 2$) en $20 - 2 = 18$.

Verschil bepalen. De hogere frequentie van aftrekken bij opgave 6 (40%) drukt een stempel op de verdeling aftrekken-overbruggen in de categorie aftrekproblemen waar een verschil moet worden berekend. Een voor de hand liggende verklaring voor het verschil met opgave 2 is dat de getallen erg dicht bij elkaar liggen (18 kilo # 22 kilo tegen € 24 # € 40,-) en dat $22 - 18$ lastig is voor leerlingen die hun aftrekhandelingen nog niet vertrouwen. $40 - 24$ is daarentegen erg gemakkelijk, omdat vrijwel iedereen weet dat $40 - 20 = 20$. $250 - 189$ is zonder meer onaantrekkelijk, omdat dit type opgaven, met getallen groter dan 100, in de meeste groepen nog niet aan de orde is geweest.

Part bepalen. De verdeling suggereert dat leerlingen problemen waar een part moet worden berekend niet anders benaderen dan problemen waar ze een verschil moeten bepalen. Het verschil tussen opgave 3 en 9 enerzijds en opgave 14 anderzijds komt waarschijnlijk door de grootte van de getallen. De aftrekking $620 - 370$ is in de meeste groepen nog niet aan de orde geweest, terwijl $50 - 25$ en $100 - 48$ aftrekkingen zijn die iedereen al aan het einde van groep 4 zou moeten beheersen.

Aftrekken. Dat de meeste leerlingen kale aftrekkingen aftrekkend oplossen kwam in de vorige analyse aan het licht (zie hoofdstuk 6). Opmerkelijk is dat het enige aftrekprobleem waar aftrekken ondubbelzinnig de betekenis heeft van afhalen zo vaak overbruggend wordt opgelost.

Dit wordt waarschijnlijk verklaard door het feit dat de aftrekking $900 - 595$ nog niet aan de orde is geweest en bovendien buitengewoon lastig is. Deze opgave is dan ook alleen voorgelegd aan leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep die blijkbaar in staat zijn om een dergelijke aftrekking tot een optelsom terug te brengen: $900 - 595 = 305$ via $(595 + 5) + 300 = 900$.

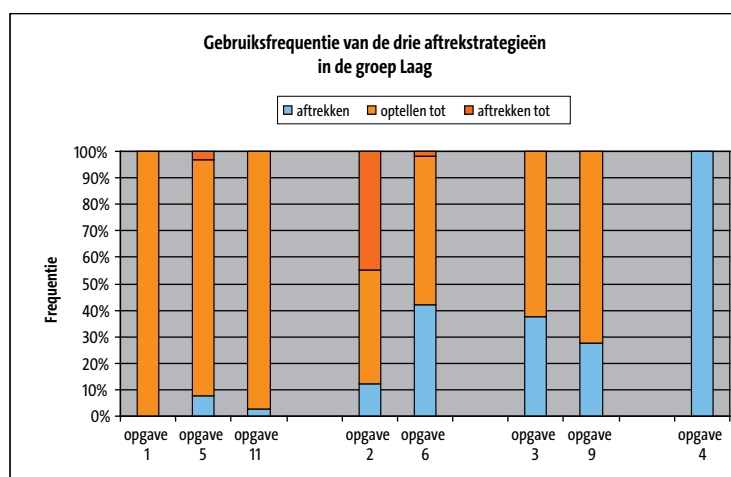
2 Welke indicatie geeft de variatie in het gebruik van aftrekken, optellen tot en aftrekken tot over de invloed van de context en van de getallen?

De variatie in het gebruik van de drie aftrekstrategieën bij het oplossen van eenzelfde type opgave weerspiegelt de invloed van de context en die van de getallen. Voor de leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog levert analyse van de resultaten de volgende observaties:

Groep Laag

Bij de analyse van kaal rekenen in hoofdstuk 6 is al gesignaleerd dat alle leerlingen uit de groep Laag de opgave $60 - 35$ aftrekkend uitrekenen. De oplossingen van de overige opgaven geven aanvullende aanwijzingen over hoe de context en de getallen het strategiegebruik van deze groep leerlingen beïnvloedt. In figuur 7.6 wordt de gebruiksfrequentie van de strategieën in deze vaardigheidsgroep weergegeven.

Figuur 7.6 Gebruiksfrequentie van de drie aftrekstrategieën in de groep Laag ($n = 358$)



Invloed van de context

De leerlingen reageren conform de hierboven gerapporteerde algemene trend:

- De drie aanvulproblemen (opgave 1, 5 en 11) worden vrijwel uitsluitend *optellend tot* opgelost.
- Veel leerlingen rekenen het verschil van opgave 2 en 6 uit door het overbruggen van de afstand tussen beide getallen (respectievelijk 88% en 58% van de leerlingen).
- In ongeveer 7 van de 10 oplossingen wordt het onbekende part in opgave 3 en 9 door middel van aanvullend optellend uitgerekend en niet door middel van aftrekken.

Invloed van de getallen

In de context van aanvullen is *aftrekken tot* het meest voor de hand liggende alternatief voor *optellen*, omdat elk aftrekprobleem kan worden teruggebracht tot een aftrekking. Leerlingen trekken echter liever niet af. Op grond hiervan kan worden verwacht dat leerlingen alleen *aftrekken tot* gebruiken als de aftrekhandelingen even gemakkelijk zijn als de optelhandelingen. Dit zou het gebruik van deze strategie bij opgave 5 kunnen verklaren:

- $36 - ? = 25$ via $36 - 10 = 26$ en $26 - 1 = 25$, dus 11;
- in plaats van $25 + ? = 36$ via $25 + 10 = 35$, $35 + 1 = 36$, dus 11.

Bij opgave 2 moet de leerling het verschil tussen 22 kg en 18 kg en in opgave 6 tussen € 24,- en € 40,- uitrekenen. In beide gevallen lokken zowel de beschrijving van de relatie als de vraag *aftrekken tot* uit:

Opgave 2

Joyce weegt 18 kilo en Lex 22. Hoeveel kilo is Joyce lichter dan Lex?

Opgave 6

De bloes met de korte mouwen is goedkoper dan de bloes met de lange mouwen.

Hoeveel euro goedkoper?

In dergelijke contexten is *optellen tot* het eerste alternatief, omdat de handelingen gemakkelijker zijn dan bij *aftrekken tot* en is *aftrekken* het tweede alternatief. Bij opgave 6 is de groep leerlingen die aanvullend optelt even groot als de groep leerlingen die terugrekent (ongeveer 43%).

Dit suggereert dat in dergelijke gevallen leerlingen die flexibel rijgen de aangewezen rekenrichting negeren, omdat *optellen tot* in de regel gemakkelijker is dan *aftrekken tot*.

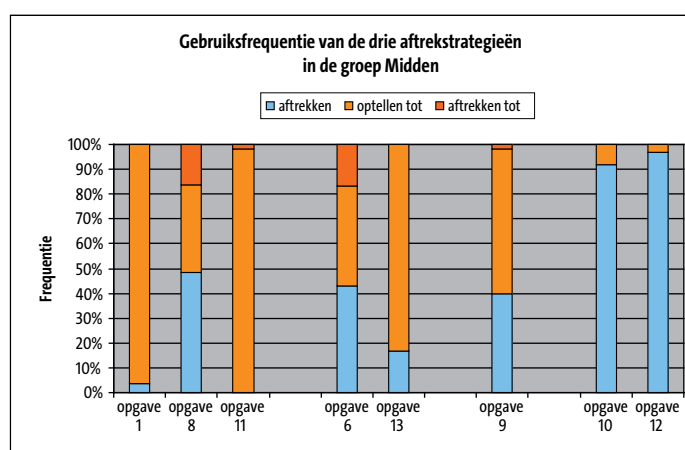
Bij opgave 6 wordt terugrekenen slechts in één van de 50 rijoplossingen toegepast. 28 leerlingen rekenen $24 + ? = 40$ uit (56%) en 21 leerlingen trekken 24 van 40 af (42%). Dit bevestigt het signaal dat leerlingen liever vooruit rekenen dan terugrekenen en dat ze aftrekken toepassen als de betreffende aftrekhandeling vrij gemakkelijk is (c.q. als ze die beheersen). Dat is hier het geval bij de opgaven: $40 - 20 = 20$ en $20 - 4 = 16$.

Hetzelfde vertrouwen zou het verschil kunnen verklaren in het aantal keer dat aftrekken bij opgave 3 en 9 wordt gebruikt om het onbekende deel te bepalen. $50 - 25$ is rijgend gemakkelijker dan $100 - 48$, zeker voor een leerling die nog met sprongen van 10 aftrekt.

Groep Midden

De analyse van kaal rekenen in hoofdstuk 6 heeft laten zien dat leerlingen uit de middengroep de kale aftrekkingen $100 - 86$ en $62 - 48$ vooral aftrekkend uitrekenen. $100 - 86$ en $62 - 48$ worden respectievelijk in slechts 6 van de 73 en 1 van de 30 oplossingen aanvullend optellend uitgerekend. De oplossingen van de overige opgaven bevestigen de indicaties die de oplossingen van de groep Laag geven (zie de grafiek van figuur 7.7).

Figuur 7.7 Gebruiksfrequentie van de drie aftrekstrategieën in de groep Midden ($n = 402$)



Invloed van de context

Leerlingen uit de groep Midden reageren, globaal genomen, niet anders dan de leerlingen uit de groep Laag op de vier typen opgaven:

- Twee van de drie aanvulproblemen (opgave 1 en 11) worden vrijwel uitsluitend via *optellen tot* opgelost.

- Veel leerlingen rekenen het verschil van opgave 2 en opgave 6 uit via het overbruggen van de afstand tussen beide getallen (respectievelijk 88% en 58% van de leerlingen).
- Het part van opgave 9 wordt in 7 van de 10 oplossingen aanvullend optellend uitgerekend.

Opmerkelijk is het verschil in de aanpak van opgave 8 in vergelijking met het strategiegebruik bij de twee andere aanvulproblemen (opgave 1 en 11). In ruim 15% van de rijgoplossingen rekent de leerling terug (aftrekken tot) en niet vooruit (optellen tot) zoals een caissière dat doet:

Dus: $50 - ? = 32$ via 50 eraf 10 is 40; 40 eraf 8 is 32, 18 eraf gedaan: hij krijgt 18 euro terug; in plaats van: $32 + ? = 50$ via $32 + 8 = 40$, $40 + 10 = 50$, samen 18.

Een mogelijke verklaring voor het gebruik van *afrekken tot* is dat het woord *terug* in de formulering van de vraag (*Hoeveel euro krijgt hij terug?*) sommige leerlingen in die richting stuurt.

Invloed van de getallen

Een andere mogelijke verklaring voor terugrekenen bij opgave 8 is dat de aftrekhandelingen even gemakkelijk zijn als de optelhandelingen: $36 - 10 = 26$, $26 - 1 = 25$, dus 11 in plaats van $25 + 10 = 35$, $35 + 1 = 36$, dus 10.

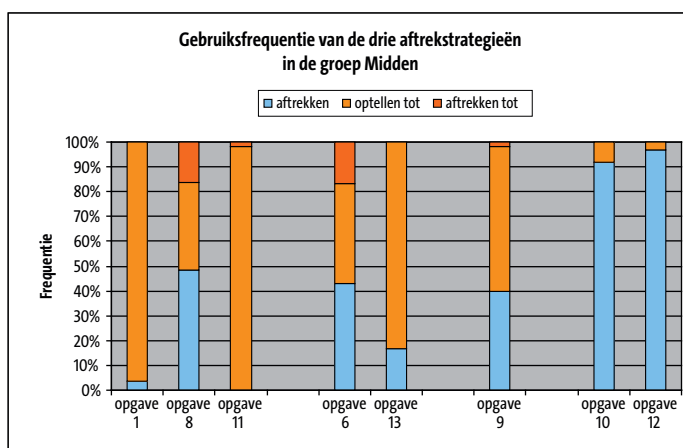
Een tweede opvallend verschil in strategiegebruik in de context van aanvullen is dat aftrekken vrijwel alleen bij opgave 8 als alternatief voor optellen tot wordt gebruikt. Dit bevestigt de hypothese dat de moeilijkheidsgraad (c.q. het beheersingsniveau) van de aftrekhandelingen het gebruik van aftrekken sterk bepaalt. $50 - 32$ is erg gemakkelijk, omdat vrijwel iedereen weet dat $50 - 30 = 20$ en $20 - 2 = 18$, terwijl $102 - 90$ extreem moeilijk is.

De gemakkelijheid van de aftrekhandelingen zou ook kunnen verklaren waarom zoveel leerlingen uit de middengroep het verschil bij opgave 6 en het part bij opgave 9 via aftrekken bepalen: $40 - 24$ in plaats van $24 + ? = 40$ en $100 - 48$ in plaats van $48 + ? = 100$.

Groep Hoog

De resultaten van de analyse van de resultaten van de leerlingen uit de groep Hoog staan weergegeven in figuur 7.8.

Figuur 7.8 Gebruiksfrequentie van de drie aftrekstrategieën in de groep Hoog ($n = 471$)



Het meest opmerkelijke is dat 60% van de leerlingen uit deze vaardigheidsgroep het enige echte aftrekprobleem, opgave 16, overbruggend oplost in plaats van aftrekkend. De kwalitatieve analyse van de oplossingen laat zien dat één op de twee leerlingen de opgave $900 - 595$ uitrekent als $595 + ? = 900$ en één op de tien leerlingen als $900 - ? = 595$. In de resterende 40% van de rijgoplossingen wordt dus 595 van 900 afgetrokken.

De analyse van oplossingen van het kale rekenen heeft aan het licht gebracht dat 10% van de leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep de kale aftrekking $62 - 48$ (opgave 12) via optellen tot of aftrekken tot uitrekent. Beide gegevens suggereren dat er binnen de groep leerlingen met een hoge vaardigheid leerlingen zijn die de neiging hebben om sommige aftrekopgaven tot een optelopgave terug te brengen.

Invloed van de context

De tendens die in de twee vorige analyses is gevonden, vinden we terug in de oplossingen van de resterende opgaven.

- De twee aanvulproblemen (opgave 11 en opgave 17) worden vrijwel uitsluitend via optellen tot opgelost.
- Heel veel leerlingen rekenen het verschil van opgave 6 en opgave 13 uit via het overbruggen van de afstand tussen beide getallen.
- Leerlingen benaderen de opgaven waarbij ze een verschil moeten uitrekenen (opgave 6 en 9) niet structureel anders dan de opgaven waarbij ze een deel van een hoeveelheid of grootte moeten uitrekenen (opgave 9 en 14).

Invloed van de getallen

De variatie in het gebruik van aftrekken tot en aftrekken komt sterk overeen met de variatie die in de groepen Laag en Midden is gevonden. Het valt echter op dat aftrekken tot bij 7 van de 8 opgaven wordt toegepast, hoewel de gebruiksfrequentie wel laag is (1 – 10%). Dit suggereert dat sommige leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep geneigd zijn om gebruik te maken van de voordelen van deze aftrekstrategie.

Wat ook opvalt is, dat bijna 10% van de leerlingen opgave 11 via $102 - 90$ uitrekent, terwijl de aftrekhandelingen in deze opgave vrij complex zijn.

De aftrekhandelingen bij de opgaven 13 (verschil bepalen) en 14 (part bepalen) zijn veel complexer dan de aftrekhandelingen van de opgaven 6 en 9. *Aftrekken* wordt als strategie bij opgave 13 en 14 minder gebruikt. Dit ondersteunt de hypothese dat aftrekken vaker wordt gebruikt naarmate de leerling de bijbehorende aftrekhandelingen vlot kan uitvoeren.

3 Hoe sterk varieert het aantal correcte antwoorden afhankelijk van de gebruikte aftrekstrategie?

De percentages in figuur 7.9 geven aan hoe vaak de drie aftrekstrategieën tot een correcte uitkomst leiden.

Figuur 7.9 Percentage correcte antwoorden per aftrekstrategie

Groepen	Aftrekken	Optellen tot	Aftrekken tot
Laag	77	79	92
Midden	85	90	73
Hoog	88	92	76

Deze resultaten laten zien dat leerlingen uit de groep Laag de toegepaste rijghandelingen nog maar matig beheersen. Het valt op dat het er niet toe doet of ze aftrekken (77% goed) of aanvullend optellen (79% goed).

De zeer hoge scores die de groep Hoog behaalt, geven daarentegen aan dat deze leerlingen zeer goed overbruggend kunnen rijgen en ook zeer goed kunnen aftrekken. Zij lijken dan ook optimaal van het rijgen te profiteren.

Leerlingen uit de middengroep nemen een tussenpositie in. Wat in die groep opvalt is dat aftrekken tot relatief vaak tot een foutieve uitkomst leidt (73% goed).

De analyse op opgaveniveau geeft de volgende aanvullende indicaties.

Groep Laag

Het percentage correcte antwoorden van de groep Laag wordt in figuur 7.10a per opgave gepresenteerd. Deze resultaten laten twee tendensen zien:

- Optellen tot leidt in de regel tot meer correcte antwoorden dan aftrekken. Het garandeert echter niet dat de leerling het juiste resultaat vindt. Het laagste percentage correcte antwoorden is 67% bij opgave 3 ($25 + ? = 50$), het hoogste 91% bij opgave 11 ($90 + ? = 102$).
- De aftrekhandelingen worden slechts matig beheerst. 60% van de leerlingen die opgave 5 en 9 rijgend aftrekkend uitrekent, vindt de juiste uitkomst. In 70% van de gevallen wordt opgave 1 correct uitgerekend.

Figuur 7.10a Percentage correcte antwoorden per aftrekstrategie in de groep Laag

Opgaven	Betekenis van aftrekken	Aftrekstrategieën		
		Aftrekken	Optellen tot	Aftrekken tot
1	Aanvullen	n.v.t.	70	n.v.t.
5		60	84	50
11		0	91	n.v.t.
2	Verschil bepalen	n.v.t.	86	n.v.t.
6		71	68	100
3	Part bepalen	n.v.t.	67	n.v.t.
9		60	77	n.v.t.
4 (kaal)	Afhalen	86	n.v.t.	n.v.t.

Te weinig leerlingen hebben teruggerekend om de effectiviteit van aftrekken tot te kunnen vaststellen. Concluderend kan worden vastgesteld, dat leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep de aftrekhandelingen en de procedure die bij optellen tot worden gebruikt nog onvoldoende beheersen om optimaal te kunnen profiteren van de voordelen van het rijgen.

Groep Midden

Het percentage correcte antwoorden van de groep Midden wordt in figuur 7.10b per opgave gepresenteerd.

Figuur 7.10b Percentage correcte antwoorden per aftrekstrategie in de groep Midden

Opgaven	Betekenis van aftrekken	Aftrekstrategieën		
		Aftrekken	Optellen tot	Aftrekken tot
1	Aanvullen	100	81	n.v.t.
8		89	100	89
11		n.v.t.	97	100
6	Verschil bepalen	89	92	55
13		20	80	n.v.t.
9	Part bepalen	96	82	n.v.t.
10 (kaal)	Afhalen	81	100	n.v.t.
12 (kaal)		90	100	n.v.t.

Deze resultaten zijn vrij homogeen en geven onderstaande aanwijzingen:

- Het percentage correcte antwoorden varieert per strategie en per opgave tussen 80% en 100%, afgezien van opgave 13 en 6 (55% bij aftrekken tot).
- Optellen tot leidt niet structureel tot meer correcte uitkomsten dan aftrekken, maar de zes leerlingen die $100 - 86$ (opgave 10) aanvullend optellend uitrekenen vinden allemaal de juiste uitkomst (evenals de leerling die opgave 12, $62 - 48$, op deze manier uitrekent).
- De oplossingen van opgave 13 signaleren dat optellen tot loont, als de getallen groter zijn dan 100. In 8 van de 10 oplossingen waar het verschil tussen 189 en 250 aanvullend optellend wordt uitgerekend, is de uitkomst correct, terwijl $250 - 189$ slechts tot 20% correcte antwoorden leidt.
- Opmerkelijk is ten slotte het zeer lage percentage correcte antwoorden bij het uitrekenen van het verschil tussen 40 en 24 (opgave 6) via terugrekenen. 11 van de 65 leerlingen passen deze strategie toe. Slechts 6 daarvan vinden de juiste uitkomst.

Concluderend kan worden vastgesteld dat leerlingen uit de middengroep rijgend aftrekken goed beheersen. Ze maken te weinig gebruik van aftrekken tot om de beheersing van deze strategie te kunnen beoordelen.

Groep Hoog

De resultaten in de groep Hoog zijn in figuur 7.10c gepresenteerd. Het zeer hoge percentage correcte antwoorden in vrijwel alle categorieën is opmerkelijk, omdat deze leerlingen in vijf van de zeven gevallen met getallen groter dan 100 aftrekken (opgave 11, 13, 14, 16 en 17). Afgezien van opgave 17 (succespercentage 0 %), wordt het laagste percentage correcte antwoorden behaald bij het uitrekenen van opgave 13: $250 - 189$ om het verschil in hoogte tussen twee torens uit te rekenen. Het antwoord is in 64% van deze berekeningen juist. Het voordeel van *optellen tot* is evident. De uitkomst is in ruim 90% van de aanvuloplossingen correct. In drie van de zeven opgaven leidt optellen tot tot betere resultaten dan aftrekken. In maar twee van de resterende opgaven vindt iedereen die aftrekt of aanvullend optelt de juiste uitkomst. Eén van de zes leerlingen die van 900 tot 595 terugreken maakt een fout. Dit verklaart het lage percentage goede antwoorden bij aftrekken tot bij opgave 16.

Figuur 7.10c Percentage correcte antwoorden per aftrekstrategie in de groep Hoog

Opgaven	Betekenis van aftrekken	Aftrekstrategieën		
		Aftrekken	Optellen tot	Aftrekken tot
11 17	Aanvullen	100 0	99 83	100 100
6 13	Verskil bepalen	92 64	100 90	100 100
9 14	Part bepalen	96 100	100 89	n.v.t. 100
12 (kaal) 16	Afhalen	93 80	100 97	100 83

Concluderend kan worden gesteld dat leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep erg profiteren van de voordelen van rijgen voor het oplossen van aftrekproblemen in het getalgebied tot 1000, door de drie aftrekstrategieën succesvol te gebruiken.

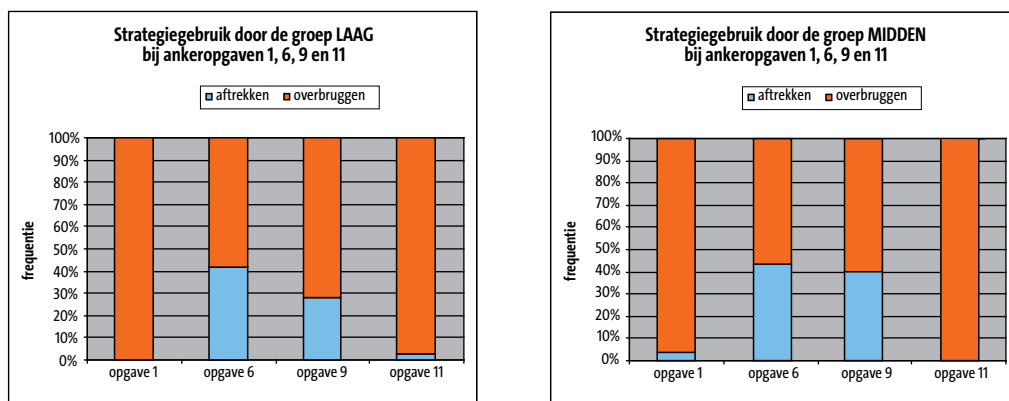
4 In welke mate hangt de gebruiksfrequentie van de aftrekstrategieën samen met het vaardigheidsniveau van de leerling?

De oplossingen van de opgaven geven geen aanwijzing dat het vaardigheidsniveau van de leerling er toe doet. Wel laten de uitgevoerde analyses lichte verschillen zien in het gebruik van aftrekken en overbruggen.

Laag versus Midden

De staafdiagrammen in figuur 7.1 visualiseren de overeenkomsten en verschillen in aanpak tussen de groepen Laag en Midden. De twee staafdiagrammen lijken sterk op elkaar. Er tekent zich een klein verschil af bij opgave 9 die in de middengroep in 4 op de 10 oplossingen aftrekkend wordt opgelost en in de groep Laag in krap 3 op de 10 oplossingen.

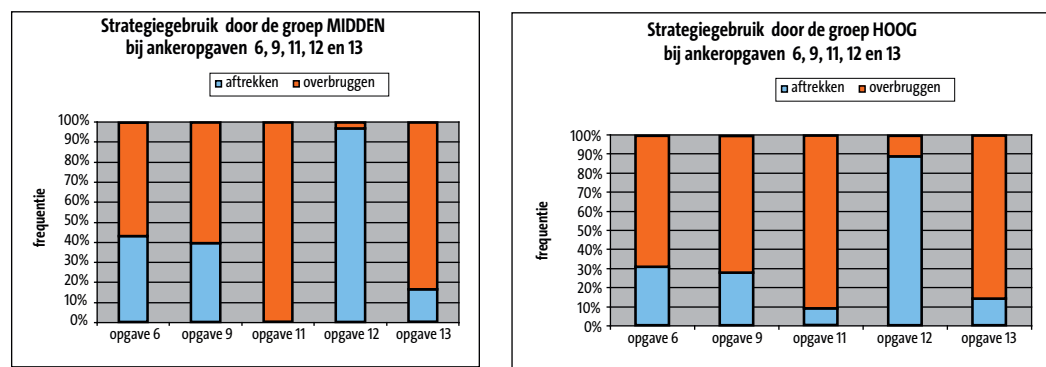
Figuur 7.11 Verschil in het gebruik van aftrekken en overbruggen tussen de groepen Laag en Midden



Midden versus Hoog

De staafdiagrammen in figuur 7.12 visualiseren de overeenkomsten en verschillen in aanpak tussen de groepen Midden en Hoog. De geobserveerde aanpakken suggereren dat leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep meer geneigd zijn het onbekende deel van opgave 6 en het verschil van opgave 9 via de overbruggingsstrategieën uit te rekenen dan de leerlingen uit de middengroep. Het verschil schommelt in beide gevallen rond de 15%. Ook opgave 12 wordt door leerlingen uit de groep Hoog vaker via overbruggen opgelost (1 op de 10 leerlingen uit de groep Hoog tegen 1 op de 30 uit de groep Midden).

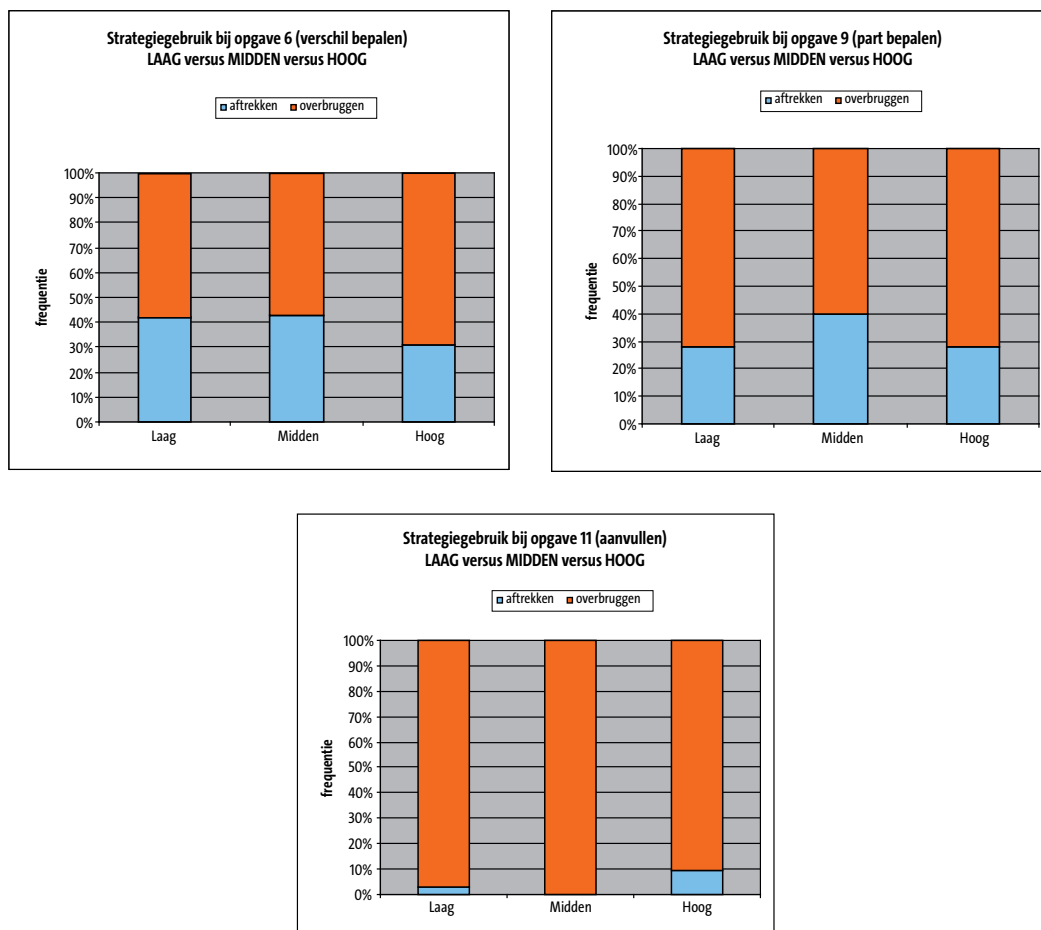
Figuur 7.12 Verschil in het gebruik van aftrekken en overbruggen tussen de groepen Midden en Hoog



Laag versus Midden versus Hoog

De drie ankeropgaven die leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog gemeenschappelijk hebben gemaakt, laten lichte verschillen zien tussen groepen, afhankelijk van de opgaven.

Figuur 7.13 Verskil in het gebruik van aftrekken en overbruggen tussen de groepen Laag, Midden en Hoog



- Aanvullend optellen wordt in de groep Hoog vaker toegepast dan in de groepen Midden en Laag om het verschil tussen 40 en 24 (opgave 6) uit te rekenen. Het verschil loopt op tot 10%.
- Leerlingen uit de middengroep passen vaker aftrekken toe om het part van opgave 9 uit te rekenen dan leerlingen uit de groepen Laag en Hoog. Ook dit verschil bedraagt ongeveer 10%.
- Er is ten slotte een kleine groep leerlingen uit de groep Hoog die opgave 11 aftrekkend uitrekent in plaats van door te overbruggen, zoals (vrijwel) iedere leerling uit de groep Laag en Midden dat doet.

Concluderend moeten we vaststellen dat de vergelijking van de aanpakken geen aanwijzingen geeft dat het strategiegebruik structureel samenhangt met het vaardigheidsniveau van de leerling. Er worden slechts bij enkele opgaven lichte verschillen gevonden. Deze verschillen signaleren een sterkere tendens tot aftrekken in de groep Midden en een sterke tendens tot overbruggen in de groep Hoog.

7.4 Rijgprocedures in relatie met de aftrekstrategieën

Onderzoeksvragen

- 1 Hoe vaak gebruiken leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog de verschillende rijgprocedures en hoe goed worden deze procedures beheerst?
- 2 Hoe combineren de leerlingen hun rijgprocedure met de gevolgde aftrekstrategie?
- 3 Hoe sterk varieert het succes afhankelijk van de gebruikte combinatie van strategie en procedure?

Analyse

De voorbeeldoplossingen in figuur 7.14 illustreren de vier onderscheiden rijgprocedures én de wijze waarop leerlingen deze procedures met de drie aftrekstrategieën kunnen combineren. Onderscheid wordt gemaakt tussen vier rijgprocedures:

- aftrekken met telstappen van één;
- springen via het dichtstbijzijnde veelvoud van 10 of 100 (A10-procedure);
- springen met de 10-sprong of rekenen met veelvouden van tien (G10-procedure);
- eerst de eenheden bewerken en daarna de tienvouden.

Figuur 7.14 Voorbeelden van gecodeerde rijgoplossingen van opgave 6 (licht) en opgave 12 (donker)

Rijgprocedures	Aftrekstrategieën		
	Aftrekken	Optellen tot	Aftrekken tot
Telstappen van één	Niet geobserveerd Niet geobserveerd	24 40 Niet geobserveerd	Niet geobserveerd Niet geobserveerd
Springen via een veelvoud van 10 of 100	Niet van toepassing 62 – 2 = 60 60 – 40 = 20; 20 – 6 = 14	24 + 6 = 30 30 + 10 = 40; 10 + 6 = 16 48 + 2 = 50 50 + 12 = 62; 12 + 2 = 14	Niet van toepassing 62 – 2 = 60; 60 – 10 = 50; 50 – 2 = 48, dus 14
Springen met de 10-sprong of rekenen met veelvouden van 10 en 100	40 – 10 = 30; 30 – 10 = 20 (of 40 – 20 = 20) 20 – 4 = 16 62 – 40 = 22 22 – 2 = 20; 20 – 6 = 14	24 + 10 = 34 34 + 6 = 40; 10 + 6 = 16 48 + 10 = 58 58 + 4 = 62; 10 + 4 = 14	40 – 10 = 30 30 – 6 = 24; 10 + 6 = 16 62 – 10 = 52 52 – 4 = 48; 10 + 4 = 14
Eerst de eenheden bewerken	40 – 4 = 36 36 – 20 = 16 Eerst 8 van de 62 af via 61, 60, 59, 58, 57, 56, 55, 54. Dan 40 eraf is 14 (54 – 40 = 14)	48 + 4 = 52; 52 + 10 = 62; 10 + 4 = 14	40 – 6 = 34 34 – 10 = 24; 10 + 6 = 16 Niet waargenomen

Een leerling die telt kan terugtellen (aftrekken), doortellen tot (optellen tot) of terugtellen tot (aftrekken tot), zoals de leerling die springt terugspringt, verder springt tot of terugspringt tot.

De strategie aftrekken tot is niet vaak gebruikt. Daarom zijn de berekeningen van dit type samengenomen met de oplossingen waarin de leerling aanvullend heeft opgeteld (optellen tot). De combinatie van strategie en procedure is dan vastgesteld door uit te gaan van de koppeling van de vier onderscheiden rijgprocedures met aftrekken enerzijds en overbruggen (optellen tot óf aftrekken tot) anderzijds.

Resultaten

- 1 *Hoe vaak gebruiken de leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog de verschillende aftrekprocedures? En: hoe goed worden deze procedures beheerst?*

De geobserveerde frequenties zijn weergegeven in kolom 2, 4, 6 en 8 van figuur 7.16.

Figuur 7.16 Gebruiksfrequentie van de rijgprocedures in % en percentage correcte antwoorden

Groepen	Rijgprocedures							
	Telstappen		Sprong naar het tienvoud		10-sprong of rekenen met tienvouden		Eerst de eenheden bewerken	
	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed
Laag (358 observaties)	12	65	34	88	52	76	2	86
Midden (402 observaties)	1	75	36	95	60	83	2	60
Hoog (471 observaties)	0	n.v.t.	68	93	28	86	4	94

Gebruiksfrequentie

Deze resultaten geven de volgende aanwijzingen over het gebruik van de rijgprocedures in de drie vaardigheidsgroepen:

- Leerlingen gebruiken vooral twee rijgprocedures: ze rekenen via het dichtstbijzijnde tienvoud en met tienvouden (c.q. de 10-sprong).
- Ze bewerken bij uitzondering eerst de eenheden.
- Alleen leerlingen in de groep Laag rekenen met telstappen.
- Leerlingen uit de groep Hoog rekenen in twee van de drie rijgoplossingen via een tienvoud of honderdvoud en in één van de drie met tienvouden of honderdvouden.
- In de groep Midden worden beide procedures ongeveer in de omgekeerde verhouding gebruikt (36% tegen 60%), een frequentie die sterk lijkt op die van de groep Laag (34% tegen 50%).

Deze twee laatste punten roepen de volgende veronderstelling op. Leerlingen uit de groepen Laag en Midden hebben, op opgave 11 en 13 na, alleen aftrekepgaven met getallen kleiner dan 100 opgelost. Het omgekeerde geldt voor de leerlingen uit de groep Hoog, die afgezien van opgave 6 en 9, met getallen groter dan 100 hebben gerekend. Het is mogelijk dat deze leerlingen in deze fase van het leerproces nog via honderdvouden moeten rijden, omdat ze de optel- en/of aftrekhandelingen die ze met de G10-procedure moeten uitvoeren nog onvoldoende hebben geautomatiseerd. Onderstaande voorbeelden illustreren het gemak van rijden via een honderdvoud voor leerlingen die de getallen tot 1000 lineair hebben geordend:

- Opgave 13: $189 + ? = 250$ via $189 + 11 = 200$ en $200 + 50 = 250$, samen 61
In plaats van $250 - 189$ via $250 - 100 = 150$; $150 - 80 = 70$; $70 - 9 = 61$

- Opgave 14: $370 + ? = 620$ via **$370 + 30 = 400$** ; $400 + 200 = 600$; $600 + 20 = 620$, samen 250
In plaats van $620 - 370$ via $620 - 300 = 320$; $320 - 70 = 250$
- Opgave 16: $900 - 595$ via **$595 + 5 = 600$** , $600 + 300 = 900$, dus 305
In plaats van $900 - 500 = 400$, $400 - 90 = 310$ en $310 - 5 = 305$

Succespercentage

In alle drie de vaardigheidsgroepen leidt rijgen via een veelvoud van 10 of 100 vaker tot een juiste uitkomst dan rijgen met tienvouden of de 10-sprong (zie kolom 3, 5, 7 en 9 in figuur 7.16). Het verschil is het kleinst in de groep Hoog (7%) en bedraagt 12% in de groepen Laag en Midden. Rekenen met telstappen leidt het vaakst tot een foutieve uitkomst (in een kwart tot een derde van de teloplossingen). De enkele keren dat eerst de eenheden worden verwerkt, leveren wisselvallige resultaten op. Bij de oplossingen van de groepen Laag en Hoog is de uitkomst meestal goed. Het succes is in de middengroep is gewoon laag (60%).

2 Hoe combineren de leerlingen hun rijgprocedure met de aftrekstrategie?

Groep Laag

De trend in figuur 7.17a kan als volgt worden beschreven: In oplossingen waarbij de aftrekstrategie wordt toegepast, rijgen de leerlingen (vrijwel) altijd met de 10-sprong of tienvouden (G10). In oplossingen waarbij optellen tot of aftrekken tot is toegepast (overbruggingsstrategie), rijgen de leerlingen eerder via het dichtstbijzijnde tienvoud (A10) dan met de 10-sprong. Rekenen met telstappen wordt eerder bij overbruggen dan bij aftrekken toegepast.

Figuur 7.17a Gebruiksfrequentie in % van de rijgprocedures per aftrekstrategie in de groep Laag

Aftrekstrategieën	Aantal rijgprocedures				Totaal
	Telstappen	Sprong naar het tienvoud	10-sprong	Eerst de eenheden bewerken	
Aftrekken	5	1	92	2	100
Overbruggen	15	36	46	2	100

Groep Midden

Dezelfde trend als bij de groep Laag zien we terug in de oplossingen van de middengroep. Er wordt (vrijwel) altijd met de 10-sprong of tienvouden afgetrokken en leerlingen rekenen van het ene getal naar het andere (overbruggen) vooral via het tienvoud. De verdeling geeft ook aan dat er in de middengroep slechts bij uitzondering wordt geteld, dat wil zeggen één voor één, van het ene getal naar het andere (zie figuur 7.17b).

Figuur 7.17b Gebruiksfrequentie in % van de rijgprocedures per aftrekstrategie in de groep Midden

Aftrekstrategieën	Aantal rijgprocedures				Totaal
	Telstappen	Sprong naar het tienvoud	10-sprong	Eerst de eenheden bewerken	
Aftrekken	0	2	94	4	100
Overbruggen	2	36	60	1	100

Groep Hoog

Leerlingen uit de hoogste vaardigheidsgroep rijgen veel vaker via het tienvoud dan met tienvouden. Deze tendens komt ook tot uitdrukking in de gebruiksverhouding van rijgprocedures bij aftrekken en overbruggen. In zeven op de tien oplossingen waarin overbruggen wordt toegepast, gebruikt de leerling een rond getal als tussenuitkomst. Deze procedure wordt ook gebruikt in bijna een op de tien oplossingen waar de leerling de aftrekstrategie volgt.

Figuur 7.17c Gebruiksfrequentie in % van de rijgprocedures per aftrekstrategie in de groep Hoog

Aftrekstrategieën	Aantal rijgprocedures				Totaal
	Telstappen	Sprong naar het tienvoud	10-sprong	Eerst de eenheden bewerken	
Aftrekken	0	9	82	9	100
Overbruggen	0	71	27	2	100

Concluderend kan wordt vastgesteld dat leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog volgens een vrij stabiel patroon rijgen:

- In alle drie de vaardigheidsgroepen rijgen de leerlingen vooral met de 10-sprong of tienvouden (c.q. 100-sprong of honderdvouden), als ze de opgave aftrekkend uitrekenen.
- Leerlingen uit de groep Laag en vooral Midden gebruiken ook vaker deze procedure dan rijgen via een rond getal, als ze de opgave overbruggend uitrekenen.
- Leerlingen uit de groep Hoog trekken op hun beurt meer gevarieerd af, maar rekenen meer eenzijdig via een rond getal, als ze de opgave overbruggend uitrekenen.

Dat leerlingen zo vaak met de 10-sprong of tienvouden rekenen als ze een opgave aftrekkend oplossen, past volledig bij deze strategie omdat ze op die manier het getal, part na part kunnen aftrekken, zoals in opgave 5: $36 - 25$ via $(36) \rightarrow 26, 16$ en $16 - 5 = 11$ of via $36 - 20 = 16$ en $16 - 5 = 11$.

Rijgen via het tienvoud past op een vergelijkbare manier perfect bij de strategie optellen tot, omdat 'volmaken' vanaf een tienvoud (of honderdvoud) zo gemakkelijk is, zoals bijvoorbeeld aanvullen tot 25, als je al 20 hebt (opgave 1): $12 + ? = 25$ via $12 + 8 = 20$ en $20 + 5 = 25$, samen 13.

3 Hoe sterk varieert het succes afhankelijk van de gebruikte combinatie van strategie en procedure?

Leerlingen komen in de regel vaker tot de juiste uitkomst, als ze een aftrekopgave met de strategie optellend tot of aftrekkend tot uitrekenen (zie figuur 7.9). De combinatie van aftrekstrategie en gebruikte rijgprocedure laat zien dat overbruggen vooral loont in combinatie met rijgen via het dichtstbijzijnde tienvoud (zie figuur 7.18).

Figuur 7.18 Percentage correcte antwoorden per gebruikte combinatie van aftrekstrategie en rijgprocedure

Groep	Aftrekstrategie	Sprong naar tienvoud (A10)	Direct met de 10-sprong (G10)
Laag	Aftrekken	100*	78
	Overbruggen	86	79
Midden	Aftrekken	67*	86
	Overbruggen	94	87
Hoog	Aftrekken	92	86
	Overbruggen	92	95

* Dit percentage correcte antwoorden wordt als irrelevant beschouwd, omdat de betreffende combinatie van strategie en procedure bij uitzondering is toegepast.

- Rijgen met de 10-sprong (c.q. veelvouden van tien) in combinatie met aftrekken is in alle drie de vaardigheidsgroepen het minst effectief. Dit is des te opmerkelijker omdat leerlingen vrijwel altijd deze procedure toepassen als ze een opgave via aftrekken oplossen (zie figuur 7.17a-c).
- Rijgen via het tienvoud in combinatie met overbruggen is daarentegen zeer effectief (tussen 86% en 94% correcte antwoorden).

7.5 Aandachtspunten

Bovenstaande resultaten richten de aandacht op drie facetten van rijgend aftrekken:

- Leerlingen rijgen volgens vaste rekenschema's.
- Leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog hebben een eigen vorm van flexibel rijgen ontwikkeld.
- Rijgend aftrekken legt de basis voor flexibel hoofdrekenen.

Flexibel rijgen volgens van vaste rekenschema's

De 1231 geobserveerde rijgoplossingen wijzen erop dat leerlingen halverwege de basisschool, volgens vaste rekenschema's rijgen. Deze schema's ontstaan door de combinatie van specifieke rekenhandelingen met een van de drie alternatieve aftrekstrategieën: aftrekken, optellen tot en *aftrekken tot*. Ze kunnen in totaal negen verschillende rijgschema's ontwikkelen en leren gebruiken (zie ook het overzicht: *Impressies van de wijze waarop leerlingen uit jaargroep 5 de negen rijgschema's toepassen* aan het einde van dit hoofdstuk).

Elk rijgschema vraagt van de leerling dat hij zijn rijghandelingen volgens specifieke getalrelaties structureert. Dit betekent dat een leerling een bepaald schema alleen succesvol kan gebruiken,

als hij de getallen waarmee hij moet rekenen op deze manier in zijn eigen referentiekader heeft georganiseerd en ook geleerd heeft om daar handig gebruik van te maken.

De meest gebruikte rijgschema's komen voort uit de combinatie van rijgen via een tienvoud en rijgen met de 10-sprong of tienvouden met respectievelijk aftrekken, optellen tot en aftrekken tot.

Eigen vorm van flexibel rijgen

De analyse van de oplossingen heeft aan het licht gebracht dat leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog niet op een standaardmanier op de aftrekopgaven reageren, maar een eigen vorm van flexibel rijgen hebben ontwikkeld. Die manier houdt in dat ze aan de ene kant vaak het rijgschema gebruiken dat bij de context en/of de gestelde vraag past maar aan de andere kant ook regelmatig juist niet conform de context of de vraag reageren, en een schema kiezen dat beter bij de eigenschappen van de getallen en/of de beschikbare getalrelaties past.

Leerlingen negeren op vier manieren de context en/of de vraag:

- Een eerste vorm komt naar voren in de oplossing van opgave 2 en 6 (verschil bepalen), als de leerling de aangewezen rekenrichting negeert om uit te rekenen hoeveel 18 kg *minder* is dan 22 kg en hoeveel 24 euro *minder* is dan 40 euro: $18 + ? = 22$ en $24 + ? = 40$ in plaats van $22 - ? = 18$ en $40 - ? = 24$.
- Een tweede vorm van afwijkend rijgen komt tot uiting bij opgave 16 (afhalen, $900 - 595$), als de leerling $595 + ? = 900$ uitrekent en niet 595 van 900 aftrekt.
- Het aanvullend optellend oplossen van $62 - 48$ via $48 + ? = 62$ is de pendant daarvan bij kaal aftrekken.
- Een vierde vorm van afwijkend rijgen is in aanvulsituaties geobserveerd, bijvoorbeeld bij opgave 5, als de leerling het geld dat de caissière teruggeeft uitrekent door 32 van 50 af te trekken in plaats van $32 + ? = 50$ uit te rekenen.

De leerlingen hebben te weinig gemeenschappelijke opgaven gemaakt om statistisch vast te kunnen stellen in welke mate flexibel rijgen samenhangt met de vaardigheid van de leerling. Toch suggereren de uitgevoerde analyses dat leerlingen uit de groep Hoog aftrekopgaven beter naar hun hand zetten door handig gebruik te maken van de voordelen van de negen bruikbare rijgschema's. Dit komt tot uitdrukking in het gebruik van een breder scala van rijgschema's in combinatie met hogere scores.

Rijgend aftrekken als basis voor flexibel hoofdrekenen

Rijgschema's zijn verankerd in het begrip van hoe getalrelaties systematisch kunnen worden gebruikt om iets uit te rekenen. In die zin legt rijgen de basis voor flexibel hoofdrekenen.

De afbeelding van oplossingswijzen op een (gemeenschappelijke) getallenlijn maakt zichtbaar welke getalrelaties iemand gebruikt en hoe zijn rekenschema met dat van een ander samenhangt. Waar het uiteindelijk om gaat, is dat de leerling zich realiseert dat hij elk aftrekprobleem met een aftrekking kan uitrekenen óf tot een optelling kan herleiden. Aanvullend optellen functioneert als brug tussen optellen en aftrekken. Dan ligt handig hoofdrekenen, waarbij de leerling afwisselend rijgt, splitst en afleidt om de aftrekking of de optelling uit te rekenen in het verschieft.

Impressies van de wijze waarop leerlingen uit jaargroep 5 de negen rijgschema's toepassen

Voorbeeldopgave 1 (aanvullen)			
Strategieën	G10	Eerst eenheden	A10
Aftrekken	25 – 12 = ?	25 – 12 = ?	25 – 12 = ?
	25 – 10 = 15 en 15 – 2 = 13	25 – 2 = 23 en 23 – 10 = 13	25 – 5 = 20 en 20 – 7 = 13
Optellen tot	12 + ? = 25	12 + ? = 25	12 + ? = 25
	12 + 10 = 22; 22 + 3 = 25 dat is samen 13	12 + 3 = 15; 15 + 10 = 25 samen 13	12 + 8 = 20; 20 + 5 = 25, samen 13
Aftrekken tot	25 – ? = 12	25 – ? = 12	25 – ? = 12
	25 – 10 = 15; 15 – 3 = 12, samen 13	25 – 3 = 22; 22 – 10 = 12, samen 13	25 – 5 = 20; 20 – 8 = 12, samen 13
Voorbeeldopgave 9 (part bepalen)			
Strategieën	G10	Eerst eenheden	A10
Aftrekken	100 – 48	100 – 48	Van 48 naar 100
	100 – 40 = 60 en 60 – 8 = 52	100 – 8 = 92 → 82, 72, 62, 52	48 + 2 = 50 → 60, 70, 80, 90, 100; samen 10, 20, 30, 40, 52
Optellen tot	Van 100 naar 48	Komt overeen met G10	Van 48 naar 100
	48 + 50 = 98; 98 + 2 = 100, dus 52		48 + 2 = 50; 50 + 50 = 100, dus 52
Aftrekken tot	Van 100 naar 48	Van 100 naar 48	n.v.t.
	100 – 50 = 50; 50 – 2 = 48, samen 52	100 – 2 = 98; 98 – 50 = 48; samen 52	
Voorbeeldopgave 12 (kaal aftrekken)			
Strategieën	G10	Eerst eenheden	A10
Aftrekken	62 – 48	62 – 48	62 – 48
	62 – 40 = 22 en 22 – 8 = 14	62 – 8 = 54 en 54 – 40 = 14	62 – 2 = 60; 60 – 40 = 20 en 20 – 6 = 14
Optellen tot	Van 48 naar 62	Van 48 naar 62	Van 48 naar 62
	(48) → 58; 58 + 4 = 62; 10 + 4 = 14	Komt overeen met A10	32 + 8 = 40; 40 + 10 = 50; 8 + 10 = 18
Aftrekken tot	Van 62 naar 48	Van 62 naar 48	Van 62 naar 48
	(62) → 52; 52 – 4 = 48; 10 + 4 = 14	62 – 4 = 58; 58 – 10 = 48; samen 14	62 – 2 = 60; 60 – 10 = 50; 50 – 2 = 48; 14
Voorbeeldopgave 16 (kaal aftrekken)			
Strategieën	G10	Eerst eenheden	A10
Aftrekken	620 – 370	620 – 370	620 – 370
	620 – 300 = 320 en 320 – 70 = 250	620 – 70 = 550 en 550 – 300 = 250	620 – 20 = 600; 600 – 300 = 300 en 300 – 50 = 250
Optellen tot	Van 370 naar 620	Van 370 naar 620	Van 370 naar 620
	(370) → 470, 570; 570 + 50 = 620, dus 250	370 + 50 = 420, 420 + 200 = 620; Samen 250	370 + 30 = 400; 400 + 200 = 600 en 20 erbij is 620; samen 250
Aftrekken tot	Van 620 naar 370	Van 620 naar 370	Van 620 naar 370
	620 – 200 = 420; 420 – 50 = 370, Dus 250	620 – 50 = 570; 570 – 200 = 370; samen 250	620 – 20 = 600; 600 – 200 = 400; 400 – 30 = 370; samen 250

(*) Oplossingen in grijze cellen zijn geobserveerd

8 Standaardisering van aftrek-procedures tot 100

Voorbeelden uit de stapel van 1231 geobserveerde oplossingen laten de weg zien die de Nederlandse basisschoolleerling volgt bij de formalisering van aftrekken tot 100. Eerst wordt ‘alles tellen’ getransformeerd in ‘dubbel tellen’ en vervolgens in ‘rijgen met sprongen in de telrij’ (jaargroep 3-4). ‘Rijgen met sprongen’ wordt daarna eerst in ‘rijgen met tienvouden’ omgezet en daarna volgens negen rijgschema’s, gestandaardiseerd en aangepast om getallen groter dan 100 te kunnen bewerken (jaargroep 5-6). De minst gevorderde leerlingen uit de groep Laag rijgen op het startniveau van jaargroep 4, terwijl de meest gevorderde leerlingen uit de groep Hoog niet onder doen voor de gemiddelde leerling van jaargroep 6.

8.1 Inhoud

Onderzoekers hebben drie fasen in de ontwikkeling van leren optellen en aftrekken kunnen onderscheiden door jonge leerlingen over een langere periode te observeren (Fuson, 1992). Ze kunnen aanvankelijk simpele problemen alleen oplossen door de handelingen van de rekensituatie met objecten na te spelen. In de overgangsperiode naar de volgende fase ontdekken ze hoe ze de actie van een rekensituatie of de relaties tussen de hoeveelheden (c.q. grootheden) van een probleemsituatie met getallen kunnen beschrijven. Ze ontwikkelen dan verschillende vormen van optellen en aftrekken op basis van geautomatiseerde telvaardigheden en het verworven inzicht in getalstructuren en -relaties en in elementaire rekenregels. Naarmate ze meer vertrouwd raken met de relaties tussen de optellingen en aftrekkingen die ze zoal oplossen en meer getallen in netwerken van optel- en aftrekrelaties hebben georganiseerd, kunnen leerlingen hoe langer hoe meer puur getalsmatig redeneren. Ze ontdekken dat ze het onbekende getal van elk willekeurig optel- of aftrekprobleem kunnen vinden door de rekenrelatie van het probleem te vervangen door een eenvoudige optelling of aftrekking die daarop lijkt. Afleiden maakt dan rekenen overbodig, zoals optellen en aftrekken met getallen in de tweede fase het naspelen met objecten zoals in de eerste fase overbodig maakte.

In dit hoofdstuk wordt verslag gedaan van het onderzoek naar de verschillende aspecten van de formalisering van het rijgen: 1) de stapsgewijze transformatie van de informele rekenhandelingen tot de meest formele rijgprocedure, 2) het niveau waarop leerlingen uit jaargroep 5 nu rijgen en 3) de samenhang tussen de mate van formalisering en het vaardigheidsniveau van de leerling.

Het onderzoek wordt in die volgorde gerapporteerd. Het geconstrueerde model van het formaliseringproces wordt als middel gebruikt om het niveau van rijgen en de samenhang met het vaardigheidsniveau vast te stellen.

8.2 Formalisering

Onderzochte formalisering

De activiteiten, taken en opdrachten van de huidige rekenboeken zijn ontworpen en georganiseerd om de leerling in staat te stellen de aanvankelijke telprocedures te veranderen in korte en flexibele vormen van rekenen op lijn. Het Tal-team (1999) en Menne (2001) onderscheiden drie fasen in dit proces:

- Het rekenen met telstappen van één (tellend rekenen van niveau 1) wordt eerst tot springen op een lege getallenlijn getransformeerd (tussenniveau van modelondersteunend).
- Dit rekenen 'op lijn' wordt vervolgens verkort tot springen in een denkbeeldige telrij, dat later in pijlentaal of sommentaal wordt genoteerd (semi-formeel rekenen van niveau 2);
- In de laatste fase van het proces leren de leerlingen deze operaties in pijlentaal en sommentaal los van de contexten en puur 'verbaal' uit te voeren (vakmatig rekenen van niveau 3).

Een groot aantal geobserveerde rijgoplossingen, waaronder die van figuur 8.1, laat zich volgens dit model in drie categorieën ordenen:

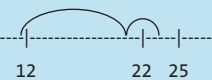
- Onder de categorie 'informeel contextgebonden' vallen alle rijgoplossingen waarin de leerling (vanaf het begin van de telrij of vanaf één getal) één voor één doortelt of terugtelt (niveau van tellend rekenen).
- Onder de categorie 'semi-formeel-modelondersteunend' worden alle rijgoplossingen gerangschikt waarin de leerling zijn handelingen op de getallenlijn modelleert of in pijlentaal en sommentaal noteert (niveau van structurerend rekenen).
- Onder de categorie 'formeel-vakmatig' vallen ten slotte alle rijgoplossingen waarin de leerling verkorte rijghandelingen in mondelinge of schriftelijke sommentaal beschrijft (niveau van formeel rekenen).

Bij de analyse van de geobserveerde oplossingen kwamen we drie problemen tegen:

- In enkele oplossingen telt de leerling op een lager niveau dan het startniveau van de realistische leergangen voor rekenen tot 100.
- Verschillende vormen van rekenen op lijn kunnen onder categorie 2 worden gebracht (structurerend rekenen, modelondersteunend) terwijl de leerlingen op grond van een verschillend relatienet rekenen. Deze categorie is te globaal om het feitelijke formaliseringproces in kaart te brengen.
- Het criterium voor de categorie 'formeel vakmatig' is ten slotte onvoldoende geëxpliciteerd om verschil aan te brengen tussen de meest formele vormen van rijgen op niveau 2 en het rijgen op niveau 3.

Om deze problemen op te lossen is een eigen methode van analyse ontwikkeld die vanuit de hierna volgende onderzoeksvraag wordt toegelicht.

Figuur 8.1 Ordening van geobserveerde rijgoplossingen volgens de drie niveaus van didactische sequëntiering

Niveau's van formalisering en van rekenen	Opgave 1	Opgave 13
Niveau 3: formeel rekenen (formeel-vakmatig)	(c) $12 + 10 = 22 + 3 = 25$, dat is samen 13	(g) 50 100 52 (bedoeld wordt: $48 + 2 = 50$, $50 + 50 = 100 \rightarrow 50 + 2 = 52$)
Niveau 2: structurerend rekenen (semi-formeel, modelondersteunend)	Verkort springen niet van toepassing met deze getallen (b) 	(f) $48 + 40 = 88$; $88 + 2 = 90$ $90 + 10 = 100$ $40 + 10 + 2 = 52$ (e)  (48) 58, 68, 78 88, 98 en 2 is 100; samen, 10, 20, 30, 40, 50, 52
Niveau 1: tellend rekenen (informeel, contextgebonden)	(a) 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25	Niet geobserveerd (d) 49(1), 50(2), 51(3), etc.

Onderzoeksvraag

Is het mogelijk om op basis van de geobserveerde rijgoplossingen te beschrijven hoe leerlingen hun oorspronkelijke telhandelingen met objecten stapsgewijs tot gestandaardiseerde rijgprocedures formaliseren?

Analyse

De ontwikkelde analysemethode gaat uit van twee aannamen:

- Het geobserveerde scala van oplossingswijzen weerspiegelt de differentiatie die ontstaat als leerlingen leren optellen en aftrekken. Het is dan mogelijk om berekeningen te identificeren die illustreren hoe leerlingen in een bepaalde ontwikkelingsfase rijgen en op welke concepties, rekenfeiten en vaardigheden deze manier van rijgen is gebaseerd.
- De geobserveerde oplossingen duiden verschillende niveaus van rekenen aan. Geordende oplossingswijzen markeren dan de weg die basisschoolleerlingen volgen om de meest concrete en uitvoerige vorm van optellen en aftrekken te veranderen in de meest compacte en abstracte manier van rekenen.

Uitgaande van deze aannamen is de volgende systematiek ontwikkeld:

1. Eerst zijn alle verschillende rijgoplossingen per opgave geïnventariseerd om een overzicht te krijgen van het repertoire aan rijgprocedures.
2. Uit deze verzameling zijn vervolgens rijgoplossingen geselecteerd die zichtbaar maken hoe leerlingen 'op lijn' aftrekken en op welke concepties, rekenfeiten en vaardigheden deze rijghandelingen zijn gebaseerd (niveaus van rijgen).
3. Ten slotte zijn de onderscheiden vormen van rijgen hiërarchisch met elkaar in verband gebracht door te expliciteren welke leerervaring de leerling in staat stelt om een lagere vorm van rijgen tot die van het eerstvolgende niveau te transformeren (condities voor niveau-verhoging).

Voor deze analyse zijn theoretische en empirische gegevens uit verschillende onderzoeksstromen gebruikt en binnen het raamwerk van de zogenoemde niveautheorie van Van Hiele (1973) geïntegreerd (Freudenthal, 1973; Steffe e.a., 1983; Fuson, 1988; Fuson e.a., 1996). We lichten dan ook eerst het niveaubegrip toe alvorens de gevonden niveaus van rijgen en de opeenvolgende niveauverhogingen te presenteren.

Resultaten

Denkniveaus

In zijn werk als docent wiskunde heeft Van Hiele aan den lijve ervaren dat een leraar zich er veelal niet van bewust is dat hij over een ander referentiekader beschikt dan de leerling. Dit verklaart de kortsluitingen tijdens de les:

“De leerling kan de redenering van de leraar in zijn geheel niet volgen. Hij begrijpt er niets van. Hij weet eigenlijk niet, waar de leraar het over heeft. De leraar voelt zich machteloos; alle argumenten, die hij aanvoert, blijken ondoeltreffend te zijn. Het is, of hij een andere taal spreekt dan de leerling, hetgeen ook inderdaad het geval is.” (p. 92)

Deze communicatieproblemen brachten hem op het idee dat mensen op verschillende gronden uitspraken doen en dat de aangevoerde argumenten bij verschillende niveaus van denken behoren. Deze niveaus zijn hiërarchisch geordend. Dit betekent dat een persoon slechts op een hoger niveau kan leren argumenteren en redeneren als hij voldoende vertrouwd is met het systeem van relaties dat nodig is om op dit niveau te redeneren.

Van Hiele heeft dit idee van denkniveau gedetailleerd uitgewerkt voor het leerproces in het kader van het meetkundeonderwijs. Het is de globale uitwerking voor de ontwikkeling van het getalbegrip in het basisonderwijs dat hier als uitgangspunt wordt genomen om de oplossingswijzen hiërarchisch te ordenen. De kern is dat leerlingen in de loop van de tijd verschillend optellen en aftrekken omdat ze een verschillend referentiekader gebruiken. Ze denken anders over de getallen én ook anders over hun handelingen met deze getallen – de rekenoperaties.

Van Hiele onderscheidt drie niveaus in het denken over getallen:

- Op het eerste niveau (ook grondniveau genoemd) associeert het kind een getal met een gestalte dat hij met een woord heeft leren aanduiden, bijvoorbeeld ‘vier’ als de vier poten van een stoel en later ‘vier’ als een constellatie van vier zichtbare objecten.
- Op het tweede niveau is een getal als ‘acht’ een knooppunt in een relatiernet. Dat wil zeggen dat ‘acht’ op verschillende manieren met andere getallen is verbonden, bijvoorbeeld met ‘zeven’ ($7 + 1$), ‘vier’ ($4 + 4$ of 2×4), ‘vijf’ ($5 + 3$), ‘tien’ ($10 - 2$) en ‘zestien’ ($16 : 2$).
- Op het derde niveau van denken begrijpt de leerling hoe de getalrelaties met elkaar samenhangen en kan op basis van deze samenhang bijvoorbeeld beredeneren dat hij, als hij $62 - 48$ in $64 - 50$ verandert, hetzelfde verschil krijgt.

Wiskundige didactici als Freudenthal (1973) en onderzoekers als Fuson e.a. (1996) tonen in hun analyse aan dat wat leerlingen bij het woord ‘optellen’ en ‘aftrekken’ in gedachte hebben op een vergelijkbare manier in de loop van de tijd verandert. Op grond van deze analyse hebben we de drie niveaus van figuur 8.2 onderscheiden. Deze niveaus komen overeen met het verschil in de theorie van Van Hiele tussen het visuele, het beschrijvende en het theoretische niveau van denken.

Figuur 8.2 De drie denkniveaus waarop problemen worden opgelost

	Denkniveaus	Grondslag
III	Systeemgebonden	Met behulp van rekeneigenschappen
II	Contextgebonden	Op basis van getalrelaties
I	Handelingsgebonden	Met behulp van verzamelingen objecten, tellend

- Op het eerste niveau (handelingsgebonden) is ‘optellen’ en ‘aftrekken’ gekoppeld aan herkenbare handelingen met objecten: ‘alles tellen’, ‘weghalen’, ‘bijtellen’, ‘apart zetten’, etc.
- Op het tweede niveau (contextgebonden) denkt de leerling bij ‘optellen’ of ‘aftrekken’ aan manieren waarop hij de handelingen van een rekensituatie of de relatie tussen de hoeveelheden (c.q. grootheden) van deze situatie met getalrelaties beschrijft. Rekentermen als ‘doortellen’, ‘volmaken’, ‘aftrekken tot’, ‘afsplitsen’ en dergelijke verwijzen naar herkenbare handelingen. Hierdoor kunnen leerlingen over hun rekenhandelingen communiceren en onderzoeken hoe het komt dat eenzelfde situatie op verschillende manieren kan worden beschreven (uitgerekend) en hoe de ene beschrijving (berekening) met de andere samenhangt.
- Op het derde niveau (systeemgebonden) staan ‘optellen’ en ‘aftrekken’ voor wat je met getallen kunt doen om een onbekend gegeven te vinden, los van handelingen en hoeveelheden. Het kunnen standaardhandelingen (of algoritmen) zijn, gebaseerd op de analogie van bijvoorbeeld $420 - 380$ met $450 - 370$, $420 - 380$ met $42 - 38$ en $450 - 370$ met $45 - 37$, of redeneringen die voortvloeien uit het verband tussen de getalrelaties ($42 - 38 = 4$ want $38 + 4 = 42$).

Niveaus van rijgen

In het hele bestand van de 1231 aftrekberekeningen zijn zeven niveaus van rijgen geïdentificeerd die zichtbaar maken hoe leerlingen ‘op lijn’ aftrekken en wat ze hiervoor gebruiken. Ieder van deze zeven niveaus is te rangschikken onder een van de drie denkniveaus, zoals weergegeven in figuur 8.2. Aan de hand van voorbeeldoplossingen presenteren we de zeven onderscheiden niveaus van rijgen van het meest informele niveau (niveau 1) tot het meest formele niveau (niveau 7).

Denkniveau I: Handelingsgebonden, met behulp van verzamelingen objecten

Figuratief rijgen (niveau 1)

Niveau 1: drie keer tellen (uitbeelden met objecten)

Dit is de oorspronkelijke vorm van optellen en aftrekken (Freudenthal, 1984). De leerling speelt de handeling van de rekensituatie na met verzamelingen objecten of beeldt de relatie tussen de hoeveelheden / grootheden van deze situatie met deze objecten uit. In de situatie van opgave 1 kan de leerling bijvoorbeeld, één voor één tellend, eerst de stapel van 12 munten met 12 fiches representeren (1, 2, 3, etc. tot 12), vervolgens nieuwe fiches bijschuiven tot het totaal van 25 is bereikt (1, 2, 3 etc. tot 12 → 13, 14, 15 etc. tot 25) en ten slotte de bijgeschoven fiches één voor één tellen. Bij elke telstap representeert het object óf één element van een term óf één element van het totaal (Fuson, 1988). De drie gebruikte telgetallen duiden alleen de getelde objecten aan en worden niet in de optel- of aftrekrelatie met elkaar in verband gebracht.

Hoe de leerling de situatie uitbeeldt, hangt van het ‘rekenverhaal’ af, of wiskundig gezegd, van de betekenis en structuur van aftrekken in de gegeven context. Objecten worden *weggeschoven*

(aftrekken), *bijgeschoven* (aanvullend optellen) of *geteld en apart gezet* (aftrekken tot). Niemand uit onze onderzoeksgroep heeft een aftrekopgave uitbeeldend opgelost. Enkele leerlingen hebben wel afgeleide vormen daarvan toegepast. Die manier van tellend rekenen hoort bij het tweede denkniveau, omdat de leerlingen dan wel de telgetallen aan elkaar koppelen en objecten slechts ter ondersteuning gebruiken.

Denkniveau II: Contextgebonden op basis van getalrelaties

Tellend rijgen, met of zonder objecten (niveau 2 en 3)

In 43 van de 358 rijgoplossingen van de groep Laag en in 4 van de 402 rijgoplossingen van de groep Midden lost de leerling de opgave op door met stapjes van één in de telrij te springen, al dan niet met ondersteuning van vingers, streepjes, rondjes, en dergelijke. Leerlingen volgen op dit niveau dezelfde aftrekstrategieën als op niveau 1, maar nu in combinatie met verkorte telprocedures. Ze schuiven geen objecten weg, maar *tellen terug*, schuiven niets bij, maar *tellen door* tot het totaal is bereikt en zetten geen objecten apart, maar *tellen terug* tot ze de bekende term hebben bereikt (Fuson, 1988).

Geobserveerde voorbeelden van doortellen met objecten (opgave 1)

Leerling 28 (Laag)

Schrijft eerst 12 op en tekent daarna 5 rijtjes van 5 streepjes.

```
|||||
|||||
|||||
|||||
|||||
```

Geeft als antwoord: 25 muntjes en schrijft dit getal in het antwoordvak op.

Uitleg: *Je moet 5 rijtjes van 5 munten tekenen. Dan hoef je maar van 12 tot 25 te tellen. En dan heb je het antwoord.*

Leerling 299 (Laag)

Telt tot 12 (1, 2, 3, en vult aan tot 25 door rondjes te tekenen en vervolgens het aantal getekende rondjes te tellen:

```
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 → ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
      1  2  3  4  5  6  7  8  9 10 11 12 13
```

Leerling 67 (Laag)

Telt door vanaf 12. Symboliseert de stappen met streepjes. Telt 13 strepen bij de 2e telling en geeft 13 als antwoord.

(12) ||||| (25)

Niveau 2: verkort tellen met objecten

De toelichting van leerling 28 wijst uit dat hij op de drempel van verkort tellen met objecten staat. Hij legt perfect uit dat hij 'maar' van 12 naar 25 hoeft te tellen om het antwoord op de gestelde vraag te krijgen, maar moet nog wel eerst de totale hoeveelheid representeren. Hij vergist zich of interpreteert zijn telhandelingen verkeerd en geeft hierdoor het totaal (25) in plaats van de tweede term (13) als antwoord.

Leerlingen 67 en 299 handelen op het niveau van verkort tellen met objecten. Het fundamentele verschil met 'drie keer tellen' (niveau 1) is dat de leerling op dit tussenniveau ervan uitgaat dat de 12 munten van de kleine stapel (term van de aftrekking) deel uitmaken van de 25 munten van de grote stapel (totaal). Dit maakt het afbeelden van de bekende term overbodig.

De oplossingswijze van leerling 299 is exemplarisch voor leerlingen die de vereiste telvaardigheid nog niet hebben geautomatiseerd (in dit geval doortellen vanaf een willekeurig getal).

Deze leerling zegt eerst de telwoorden op vanaf 1 tot en met 12, alsof hij de munten van de eerste stapel representeert en vervolgens, vanaf 12, de munten die hij moet opstapelen om de stapel van 25 munten te krijgen.

Leerling 67 is het schoolvoorbeeld van het kind dat niveau 2 heeft bereikt. Hij schematiseert de situatie met streepjes die de gegeven term (in een aanvulrelatie) aan het totaal verbinden en telt twee keer om de vraag te kunnen beantwoorden: één keer om de afstand tussen 12 en 25 tekenend te overbruggen ($12 \rightarrow 13, 14, 15$ etc. tot 25) en één keer om de getekende telstappen te tellen (1, 2, 3 etc. tot 13).

Niveau 3: Dubbel tellen

In het grootste deel van de in totaal 47 geobserveerde teloplossingen hebben de leerlingen zonder gebruik te maken van objecten (vingers) doorgeteld of teruggeteld en tegelijkertijd de gemaakte telstappen bijgehouden. De voorbeeldoplossing van opgave 2 hieronder (verschil tussen 18 kilo en 22 kilo) illustreert deze manier van aanvullend optellen via dubbel tellen.

Voorbeeldoplossing van opgave 2

Vier!

Hoe heb je het uitgerekend?

18 doortellen tot 22: 19, 20, 21, 22. Eraf vind ik moeilijk.

In de terminologie van Van Hiele hebben bovenstaande voorbeeldleerlingen de sprong van het 'visuele' niveau van denken naar het beschrijvende niveau gemaakt. Ze beelden de aanvulrelatie van opgave 1 en de verschilrelatie van opgave 2 niet meer met objecten uit, maar symboliseren deze relatie met telstappen, gebruikmakend van de volgorde van de getallen in de telrij. Bij de eerste niveauverhoging verlaat de leerling via doortellen / terugtellen het grondniveau van denken (leerling 28). Als hij geen objecten meer nodig heeft, heeft hij het fundament van het rijgen gelegd, zoals aangegeven in het schema van figuur 8.3.

Figuur 8.3 Fundament van het rijgen

3	Tellend	Dubbel tellen
2		Verkort tellen met objecten (twee keer tellen)
NIVEAU I – Handelingsgebonden, met behulp van verzamelingen objecten		
1	Figuratief	Uitbeelden met verzamelingen objecten (drie keer tellen)
Niveaus van formalisering van het rekenen		Rekenhandelingen

Lineair-decimaal rijgen (niveau 4 en 5)

Aftrekken met sprongen in de telrij (op een getallenlijn) is in alle drie de vaardigheidsgroepen een van de twee meest gebruikte vorm van rijgen. Het merendeel van de leerlingen trekt mentaal en puur verbaal met sprongen af, zoals de hiervoor gepresenteerde voorbeelden dat illustreren.

Een leerling die dit niveau heeft bereikt, knoopt getallen in optel- of aftrekrelaties aan elkaar om de verandering of de relatie van de opgave weer te geven. In het geval van opgave 1 wordt $12 + ? = 25$ uitgerekend door 12 met 20 en 20 met 25 te verbinden ($12 + 8 = 20$ en $20 + 5 = 25$) of

12 met 22 en 22 met 25 ($12 + 10 = 22$ en $22 + 3 = 25$). Het verschil met rekenen op niveau 3 is dat het netwerk, waarvan de getallen 12, 22 en 25 (of 12, 20 en 25) de knooppunten vormen, nu de reeks getallen (13, 14, 15 ... 24) vervangt die de leerling eerst als 'loopplank' gebruikte:



We duiden dit niveau van rijgen met de term 'lineair-decimaal' aan. 'Lineair' geeft aan dat de leerling 'op lijn' rekt door van het ene getal naar het andere in de telrij te springen (ordinaal aspect van rijgen). 'Decimaal' duidt aan dat hij de decimale structuur en ordening van de getallen gebruikt om adequate getallen op een handige manier aan elkaar te verbinden. Leerlingen trekken ook op dit niveau strategisch af. De formalisering bouwt in die zin voort op de geleerde aanpak in de voorafgaande fasen, zoals afgebeeld in figuur 8.4.

Figuur 8.4 Voortschrijdende formalisering van rijgaanpakken en -procedures

5				
4	Lineair-decimaal	Terugspringen	Verder springen tot	Terugspringen tot
3				
2	Tellend	Terugtellen	Doortellen tot	Terugtellen tot
NIVEAU I – Handelingsgebonden, met behulp van verzamelingen objecten				
1	Figuratief	Wegschuiven	Bijschuiven	Apart zetten
Niveaus van formalisering van het rekenen		Procedure in combinatie met de aftrekstrategie		

De voorbeeldoplossingen van opgave 9 laten de twee meest gebruikte manieren van 'knopen' zien: *springen naar het dichtstbijzijnde tienvoud* en daarna springen met 10 en/of kleinere sprongen (A10-procedure) en *direct springen met 10* (G10-procedure).

Geobserveerde voorbeelden van rijgen naar het tienvoud en rijgen met 10-sprong (opgave 9)

Aanvullend optellen met de sprong naar het tienvoud

Leerling 32 (groep Midden)

In boekje opgeschreven: $48 + 2 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 100$, samen 62 (telfout)

Aanvullend optellen met de 10-sprong

Leerling 234 (groep Midden)

$48 \rightarrow 50, 60, 70, 80, 90$, dan de 8 weer erbij is 98. Dan 2 erbij is 100.

Leerling 155 (groep Midden)

Van 48 tot 100 tellen. $48 + ? = 100$. Met behulp van de vingers: 48, 58(1), 68(2), 78(3), 88(4), 98 (5) én 2 erbij is samen 10, 20, 30, 40, 50, 52

Leerling 236 (groep Midden)

Ze denkt en schrijft 17 neer. Ze ziet aan mij dat het niet goed is. Ik vraag haar naar uitleg.

Leerling: 40 erbij... 48 erbij... 58, 68, 78, 88... Ze zegt de getallen hardop.

Ze begint opnieuw 48 erbij 10... en loopt vast. Ik zeg haar dat ze best op haar handen mag tellen.

Dat schrijft ze in haar boekje: $48 + 10 = 58 + 10 = 68 + 10 = 78 + 10 = 88 + 10 = 98 + 2 = 100$.

Ze vindt het moeilijk om de sprongen van tien samen te nemen en geeft een verkeerd antwoord: 50.

Aftrekken met de 10-sprong

Leerling 299 (groep Laag)

Lost dit op via een eigen symbolisering van rijgen met 10: $100 - 40 \rightarrow 10 \rightarrow 10 \rightarrow 10 \rightarrow 10$ dus 90, 80, 70, 60; dan $60 - 8$ via een voor een terugtellen: $60 - 1 = 59$, $59 - 1 = 58$, etc. Tekent vervolgens 8 balletjes om de stand bij te kunnen houden en telt verder terug: $58 - 1 = 57$, $57 - 1 = 56$ tot $54 - 1 = 53$. Per stap wordt een balletje weggestreept.

Niveau 4: Springen naar het dichtstbijzijnde tienvoud

Leerling 32 springt eerst naar 50 en volgt daarna de route van de zogenoemde 'grote telrij'.

Hij gebruikt hiervoor de opeenvolgende tienvouden als knooppunten om aan te vullen.

Leerling 299 demonstreert hoe deze keten van tienvouden wordt gebruikt, als de aftrekstrategie wordt gevolgd. Zijn oplossing geeft de belangrijke aanwijzing dat leerlingen die dit niveau hebben bereikt, door gemakzucht of een gebrekkige beheersing van de vereiste rekenfeiten, nog regelmatig met telstappen van één rekenen om de eenheden te bewerken (Menne, 2001).

Niveau 5: Springen met de 10-sprong vanaf een willekeurig getal

Leerling 150 demonstreert hoe leerlingen samengestelde getallen als knooppunten kunnen gebruiken om een willekeurig getal (48) met sprongen van 10 aan te vullen, in dit geval 58, 68, 78, 88 en 98.

Leerling 234 staat op de drempel van het springen met de 10-sprong. Deze leerling denkt waarschijnlijk de eenheden van 48 weg, omdat hij nog niet automatisch van 48 naar 58, 68, etc. kan springen. Dat is het verschil met de oplossing van leerling 150. Het toont aan dat knopen met tienvouden minder formeel is dan knopen met samengestelde getallen, omdat de laatste meer inzicht in de aard van de getallen vergt. Leerlingen moeten zich realiseren dat getallen zowel een ordinaal als een kardinaal aspect hebben. In opgave 9 is 48 aan de ene kant het getal dat na 47 komt en in de buurt van 50 ligt (telgetal) en aan de andere kant het getal dat uit 4 tientallen en 8 eenheden (hoeveelheidsgetal) bestaat. Als een leerling begrijpt hoe het ene aspect aan het andere is gerelateerd, valt het kwartje: 58 is het getal dat 10 stappen verder ligt dan 48, omdat 58 één tiental meer heeft dan 48.

De oplossing van leerling 236 toont ten slotte aan dat dit begrip van de relatie tussen de plaats in de telrij en de hoeveelheid voorwaardelijk is om vanaf een willekeurig getal met 10 te leren springen en inzichtelijk met samengestelde getallen te leren rijgen.

Structurerend rijgen (niveau 6)

Bij springend rijgen hangt de lengte van de gevolgde route af van de afstand tussen de getallen. Hoe verder de getallen uit elkaar liggen, des te meer sprongen van 10 de leerling moet maken.

De volgende verzameling oplossingen laat zien dat leerlingen loskomen van herhaald springen met 10 door *kardinaal* in plaats van *ordinaal* te denken. Dit betekent dat ze hun aandacht verschuiven van de *onderlinge positie* van de getallen (ordinaliteit) naar de hoeveelheidsrelaties tussen deze getallen (kardinaliteit). Getallen worden dan niet meer 'tellerderwijs' maar 'rekenderwijs' aan elkaar verbonden. De weergegeven voorbeelden tonen de hoeveelheidsrelaties en de procedures die leerlingen op dit niveau gebruiken.

We gebruiken daarom de term 'structurerend' om dit niveau van rijgen aan te duiden. Het verwijst naar het handig afsplitsen van getallen om beschikbare rekenfeiten te kunnen gebruiken.

Niveau 6: Aftrekken met tienvouden

In de voorbeeldoplossingen van opgave 9 hieronder splitst leerling 251 de term 48 in $40 + 8$ om dubbel 40 te kunnen gebruiken, vanuit de wetenschap dat dat 10 keer zoveel is als dubbel 4. Leerlingen 185, 273 en 254 benutten, ieder op hun niveau, de vijfstructuur van 90 ($50 + 40 = 40 + 50 = 90$).

Leerling 144 gebruikt zeer waarschijnlijk de splitsing van 100 en het verworven inzicht in de inverse relatie tussen optellen en aftrekken: $100 - 40 = 60$ want $60 + 40 = 100$.

Geobserveerde voorbeelden van rijgen met tienvouden (opgave 9)

Aanvullend optellen met tienvouden

Leerling 251 (groep Laag)

$48 + 40 = 88$; $88 + 8 = 96$ (rekenfout: moet 96 zijn). 45 is het andere stuk (slaat het laatste stuk tot 100 over).

Leerling 185 (groep Midden)

Bij 40 doe ik 50, is 90, erbij 8 is 98. Ik doe er 2 losse bij is 100.

52 cm over. Erbij 48 is samen 100.

Leerling 273 (groep Laag)

Denkt na, 52. Doet: $48 + 50 = 98$; $98 + 2 = 100$ en $50 + 2 = 52$.

Leerling 254 (groep Laag)

Splitst 100 in 48 en 52. Ik vraag hoe hij weet dat het 52 is. Leerling zegt dan: 50 erbij doen is 98, plus 2 is 100.

Aftrekken met tienvouden

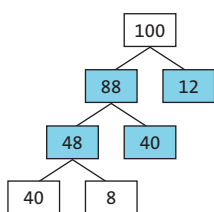
Leerling 144 (groep Hoog)

100, 40 af is 60; van de 60 nog 8 af is 52.

Figuur 8.5 visualiseert met behulp van de splitsnotatie het relatienet dat deze leerlingen gebruiken.

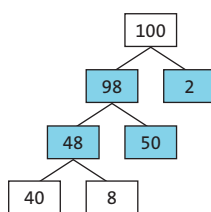
Figuur 8.5 Relatienet van de geobserveerde oplossingen van het type structurerend rijgen

Leerling 236 en 251



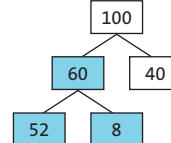
$48 + 40 = 88$; $88 + 12 = 100$
 $48 + 12$ is samen 100; dus
 Het 2e stuk is dan 52 cm lang.

Leerling 251, 273 en 254



$48 + 50 = 98$; $98 + 2 = 100$
 $48 + 52$ is samen 100
 Het 2e stuk is dan 52 cm lang.

Leerling 144



100 eraf 40 is 60
 nog 8 eraf is 52

Gestandaardiseerd rijgen (niveau 7)

De laatste verzameling voorbeeldoplossingen maakt zichtbaar hoe leerlingen op het meest formele niveau rijgen. De rijghandelingen worden in al deze voorbeelden optimaal verkort en volgens het stramien van het gebruikte rijgschema gestructureerd. Daarom duiden we dit meest formele niveau van rijgen met de term ‘gestandaardiseerd’ aan.

Geobserveerde voorbeelden van gestandaardiseerd rijgen in het getalgebied tot 100

Aftrekken via het tienvoud

Leerling 186 (groep Hoog)

Opgave 12: $62 - 48$

In boekje opgeschreven: $62 - 2 = 60$; $60 - 40 = 20$; $20 - 6 = 14$

Aftrekken met tienvouden

Leerling 15 (groep Hoog)

Opgave 12: $62 - 48$

Erg snel: $62 - 48 = 14$; $62 - 40 = 22$ en $22 - 8 = 14$. In boekje opgeschreven: $62 - 40 = 22 - 8 = 14$

Leerling 193 (groep Midden)

Opgave 10: $100 - 86$; $100 - 80 = 20$ en 4 eraf is 16. Dat is de uitkomst.

Eerst de eenheden bewerken

Leerling 136 (groep Hoog)

Opgave 12: $62 - 48$

Heel snel. $62 - 8 = 54$ en dan nog 40 eraf is 14

Aanvullen via het tienvoud

Leerling 139 (groep Midden)

Opgave 9: $48 + ? = 100$; $48 + 2 = 50$ (rond getal) en dan nog 50 erbij is 52

Aanvullen met tienvouden

Leerling 104 (groep Midden)

Opgave 9: $48 + ? = 100$; $48 + 50 = 98$ en 2 erbij is 100

Niveau 7: aftrekken volgens vaste rijgschema's

Het gekozen rijgschema bepaalt hoe beknopt de leerling aftrekt. Leerling 15 laat in zijn oplossing van opgave 12 ($62 - 48$) zien hoe compact leerlingen kunnen rekenen, als ze de standaardvorm van ‘aftrekken’ in combinatie met ‘rijgen met tienvouden’ toepassen. In vergelijking hiermee blijft de gestandaardiseerde vorm van overbruggend aftrekken omslachtiger, zoals bijvoorbeeld $62 - 48$ via $62 - 2 = 60$ (leerling 186).

Dit structurele verschil is goed zichtbaar in de negen schoolvoorbeelden van gestandaardiseerd rijgen die in figuur 8.6 worden gepresenteerd.

Figuur 8.6 Negen schoolvoorbeelden van gestandaardiseerd rijgen

Rijgprocedures	Aftrekstrategieën		
	Aftrekken	Overbruggen	
		Optellen tot	Aftrekken tot
Via het tienvoud (A10)	(1) A10: $72 - 38 = ?$ via $72 - 2 = 70$ $70 - 30 = 40$ $40 - 6 = 34$	(2) A10: $38 + ? = 72$ via $38 + 2 = 40$ $40 + 30 = 70$ $70 + 2 = 72$ $30 + 4 = 34$	(3) A10: $72 - ? = 38$ via $72 - 4 = 68$ $68 - 30 = 38$ $30 + 4 = 34$
Met tienvouden (G10)	(4) G10: $72 - 38 = ?$ via $72 - 30 = 42$ $42 - 8 = 34$	(5) G10: $38 + ? = 72$ via $38 + 30 = 68$ $68 + 4 = 72$ $30 + 4 = 34$	(6) G10: $72 - ? = 38$ via $72 - 30 = 42$ $42 - 4 = 38$ $30 + 4 = 34$
Eerst de eenheden (eG10)	(7) eG10: $72 - 38 = ?$ $72 - 8 = 64$ $64 - 30 = 34$	(8) eG10: $38 + ? = 72$ $38 + 4 = 42$ $42 + 30 = 72$ $30 + 4 = 34$	(9) eG10: $72 - ? = 38$ $72 - 4 = 68$ $68 - 30 = 38$ $30 + 4 = 34$

Onderstaande voorbeeldoplossingen van opgave 14, 13 en 16 geven ten slotte drie belangrijke aanwijzingen over de wijze waarop leerlingen uit jaargroep 5 hun rijgprocedures aanpassen om getallen groter dan 100 te kunnen bewerken.

Geobserveerde voorbeelden van gestandaardiseerd rijgen in het getalgebied tot 1000

Voorbeeldoplossingen van opgave 14

Overbruggen

- $370 + ? = 620$ via $370 + 30 = 400$; $400 + 200 = 600$; $600 + 20 = 620$, dus 250
analoog aan $37 + ? = 62$ via $37 + 3 = 40$; $40 + 20 = 60$; $60 + 2 = 62$, dus 25
- $620 - ? = 370$ via $620 - 200 = 420$; $420 - 50 = 370$; samen 250
analoog aan $62 - ? = 37$ via $62 - 20 = 42$; $42 - 5 = 37$; samen 25

Aftrekken

- $620 - 370$ via $620 - 300 = 320$ en $320 - 70 = 250$
analoog aan $62 - 37$ via $62 - 30 = 32$ en $32 - 7 = 25$

Voorbeeldoplossingen van opgave 13

Overbruggen

- (Hoog) $189 + ? = 250$ via $189 + 10 = 199$; 1 erbij is 200; $200 + 50 = 250$; samen 61
- (Midden) $189 + 10 = 199$; $199 + 10 = 209$; hersteld tot 209 → 209, 219, 229, 239, 249 en 1 erbij 250. Telt de sprongen van 10, knikkend met het hoofd en via het opsteken van de vingers. Samen 61

Aftrekken

- (Hoog) $250 - 189$ via eerst 100 eraf is 150; dan 50 eraf is 100; $100 - 30 = 70$ en $70 - 9 = 61$
- (Midden) $250 - 100 = 150$; $150 - 80 = 70$; $70 - 9 = 61$

Voorbeeldoplossingen van opgave 16

Overbruggen

- (Hoog) van 595 naar 900 via 300 erbij is 895; nog 5 erbij, dus samen 305
- (Hoog) van 900 naar 595 via $900 - 300 = 600$; $600 - 5 = 595 \rightarrow 300 + 5 = 305$

Aftrekken

- (Hoog) $900 - 595$ via eerst 500 van 900 af is 400; van 400, 5 eraf is 394; dan 90 eraf is 304

- De oplossing van opgave 14 maakt zichtbaar hoe leerlingen de tientalligheid van het systeem van hele getallen gebruiken. Deze leerling bewerkt de tienvouden zoals hij, bij het rekenen tot 100, de eenheden bewerkt en de honderdvouden zoals hij de tienvouden bewerkt (gebruik van analogie).
- De oplossingen van opgave 13 tonen aan dat sommige leerlingen op dit niveau nog de 10-sprong moeten gebruiken, terwijl anderen de tienvouden structurerend ('rekenderwijs') bewerken. Deze leerlingen telden waarschijnlijk langer één voor één in het getalgebied tot 100 om de eenheden van de opgaven te bewerken.
- De oplossingen van opgave 16 en sommige oplossingen van de opgaven 14 en 15 tonen ten slotte aan dat leerlingen uit de vaardigheidsgroep Hoog al in staat zijn om gestandaardiseerd te rijgen, terwijl dergelijke bewerkingen nog niet in het onderwijs aan de orde zijn geweest.

Figuur 8.7 visualiseert de trend in de formalisering van het rijgen. De zeven geïdentificeerde niveaus van rijgen zijn hiërarchisch geordend, uitgaande van de drie onderscheiden fasen in leren denken over getallen, optellen en aftrekken.

Figuur 8.7 Opeenvolgende niveaus bij de formalisering van rijgprocedures

NIVEAU III – Systeemgebonden, op basis van rekeneigenschappen		
7	Gestandaardiseerd	Optellen en aftrekken volgens vaste en verkorte rekenschema's
NIVEAU II – Contextgebonden, op basis van getalrelaties		
6	Structurerend	Optellen en aftrekken met tienvouden
5	Lineair-decimaal	Springen met de 10-sprong vanuit een willekeurig getal
4		Springen naar het dichtstbijzijnde tienvoud
3	Tellend	Dubbel tellen
2		Verkort tellen met objecten
NIVEAU I – Handelingsgebonden, met behulp van verzamelingen objecten		
1	Figuratief	Uitbeelden met verzamelingen objecten (drie keer tellen)
Niveaus van formalisering van het rekenen		Procedures

Niveauperhogingen

Leerlingen formaliseren hun rijghandelingen volgens een cyclisch proces. Een gevonden manier van rekenen roept vragen op en richt de aandacht van de leerlingen op eigenschappen, structuren en relaties aangaande getallen en operaties die ze tot dan toe over het hoofd zagen. Dit genereert een nieuwe, abstractere en efficiëntere vorm van rekenen die op de vorige is verankerd en die op haar beurt nieuwe vragen oproept en via de antwoorden hierop weer een nieuwe rekenvorm genereert die nog abstracter en efficiënter is dan de vorige.

De nieuw gevonden vormen van rekenen brengen, via de vragen en inhouden die ze genereren, leerlingen steeds dicht bij de kern van waar het bij 'getallen' en 'operaties' om gaat.

Elke niveauperhoging wordt mogelijk gemaakt door inzichten en vaardigheden die de leerling in de overgangsfase verwerft. We beschrijven hieronder de trend in dit proces die in het schema van figuur 8.10 (pagina 120-121) in kaart is gebracht en met voorbeelden geïllustreerd.

Eerste niveauperhoging: van uitbeelden (niveau 1) naar verkort tellen met objecten (niveau 2)

Aankankelijk spelen leerlingen de voorgelegde problemen met objecten na. Ze lossen dan de vraagstukken drie keer tellend op. Hoe er geteld wordt, hangt van het 'verhaal' af, of met andere woorden, van de betekenis en structuur van aftrekken in de betreffende rekensituatie (wegnemen, apart zetten of bijvoegen).

Het steeds opnieuw tellen richt de aandacht op de functie van deze handelingen zelf. Dit brengt leerlingen tot de ontdekking dat ze een samengestelde collectie via het 'uitbreiden' van de eerste deelcollectie kunnen tellen. Vier rode en drie overgebleven blauwe ballonnen worden bijvoorbeeld in twee stappen gesymboliseerd: eerst worden de 4 fiches één voor één tellend gelegd, waarna de leerling, na een korte pauze, tot 7 doortelt: 1, 2, 3, 4 (pauze) 5, 6, 7. De sprong naar verkort tellen met objecten hangt dan nog maar van twee condities af. Leerlingen moeten ontdekken hoe ze deze telmethode kunnen gebruiken in plaats van schuiven met objecten én een manier vinden om de telstappen die ze bij het opzeggen van de telwoorden maken bij te houden.

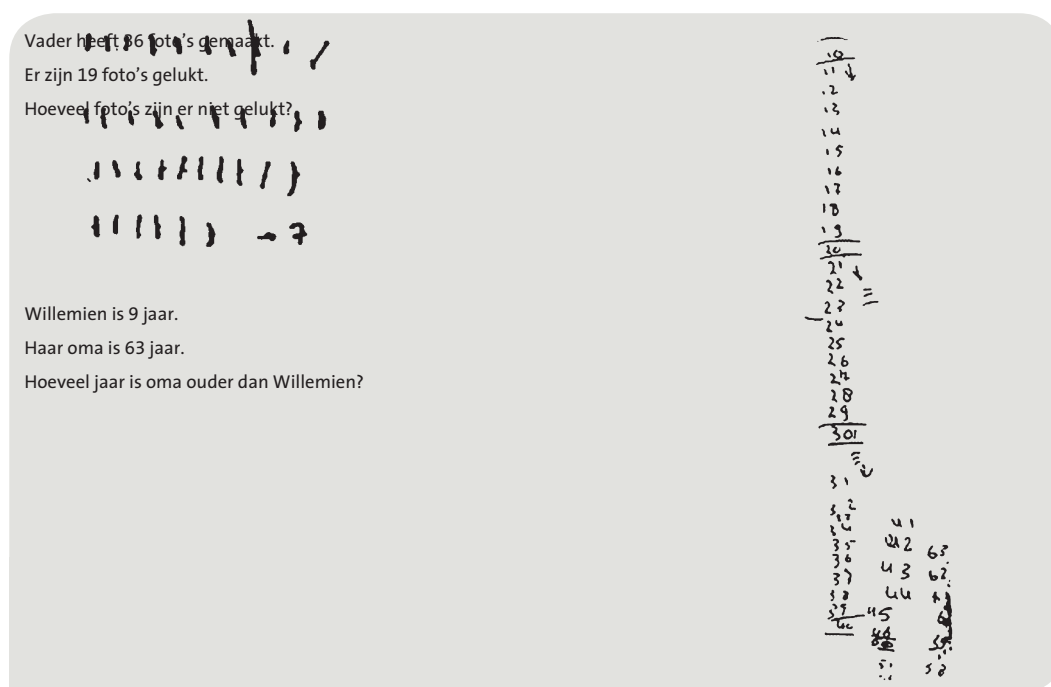
Tweede niveauperhoging: van verkort tellen met objecten (niveau 2) naar dubbel tellen (niveau 3)

In de fase van verkort tellen met objecten maakt de leerling nader kennis met de deel-geheelrelatie tussen hoeveelheden/getallen. Ze leren onder andere uit deze ervaringen dat elk heel getal (behalve 1) de som van twee andere getallen is en dat de getallen van een rekensituatie 'kardinaal' met elkaar zijn verbonden. De leerling kan, technisch gezien, pas zonder objecten rekenen als hij de telwoorden kan uitspreken en tegelijkertijd de gemaakte telstappen bij kan houden – het zogenoemde 'dubbel tellen'. In de situatie van opgave 1 telt de leerling door vanaf 12 en houdt tegelijkertijd de stand bij in zijn hoofd (getallen tussen haakjes): $12 \rightarrow 13(1), 14(2), 15(3)$ etc.

Derde niveauperhoging: van dubbel tellen (niveau 3) naar springen naar het dichtstbijzijnde tienvoud (niveau 4)

Leerlingen die dubbel tellen in springen transformeren, maken een grote sprong voorwaarts, omdat deze methode veel perspectieven biedt en dat niet alleen voor de formalisering van het rijgen. Ze leren namelijk op basis van getalrelaties te redeneren, een vaardigheid die ook bij splitsen en herleiden van pas komt evenals bij het rekenen met bijvoorbeeld kommagetallen. De omslachtigheid, het verlies van het overzicht en de kans op telfouten sporen leerlingen aan om dubbel tellen te transformeren in een andere vorm van rekenen die efficiënter en betrouwbaarder is. Als ze hun telstappen over een grotere afstand moeten bijhouden, vallen leerlingen terug op uitbeelden met objecten. Ze structureren deze telstappen nu echter 'lineair', zoals de twee leerlingen in de voorbeelden in figuur 8.8 dat doen.

Figuur 8.8 Tientallige structurering van doortelstapjes

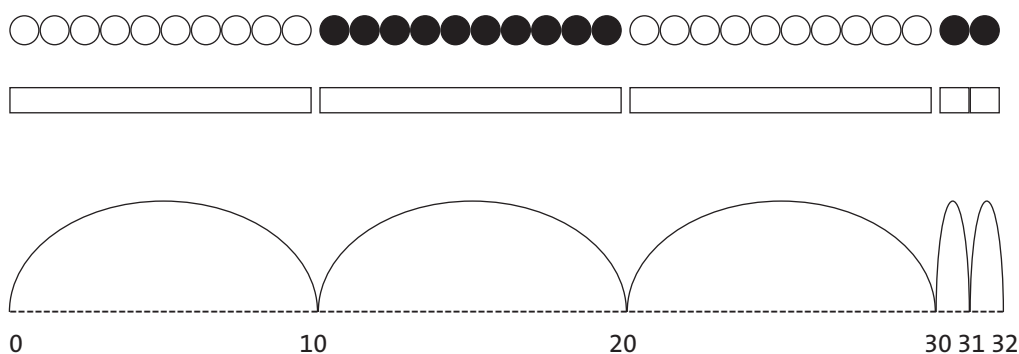


(Bron: Kraemer, 1996)

Ze tekenen telkens rijtjes van 10 strepen, houden de stappen met de handen bij in combinatie met de vingers (5 → 6, 7, ...10 → 11, 12, . → 15 → 16 etc.) of schrijven de getallen onder elkaar in de vorm van een sliert op en markeren telkens het tienvoud. De voorbeelden wijzen uit dat ze in de 'tientalligheid' de houvast zoeken die ze bij dubbel tellen missen. Als ze eenmaal hebben begrepen hoe het tellen met eenheden van 10 en losse objecten werkt, krijgen ze grip op de relatie tussen de tienvouden en de eenheden en kunnen ze uitzoeken hoe ze deze relatie voor optellen en aftrekken kunnen gebruiken.

Meet- en telactiviteiten, de symbolisering van tellingen en uitkomsten met de tweekleurige kralenketting en het uitbeelden van denkbeeldige metingen en tellingen met sprongen van 10 en 1 op een lege getallenlijn verschaffen leerlingen dan ook de middelen die ze nog hebben om minder afhankelijk te worden van dubbel tellen (zie figuur 8.9) (Beishuizen, 1992; Klein e.a.. 1996; Gravemeijer, 2003a).

Figuur 8.9 Symbolisering van 32 kaarsjes, die in doosjes van 10 stuks worden verkocht



Waar het bij deze activiteiten om gaat is dat de leerling:

- de tienvouden van de grote telrij automatiseert (10, 20, 30 etc.);
- begrijpt dat de afstand tussen de getallen direct te maken heeft met de manier waarop de getallen zijn opgebouwd: 32 komt na 31 en voor 33, 40 na 39 en voor 41, omdat(relatie tussen plaats en opbouw);
- zich realiseert dat de afstand van een willekeurig samengesteld getal tot het dichtstbijzijnde tienvoud afhangt van de eenheden en dat aanvullend optellen van bijvoorbeeld 32 tot 40 dan neerkomt op het volmaken van bijvoorbeeld een zak van 10 ballonnen die al 2 ballonnen bevat: $32 + ? = 40$ is evenveel als $2 + ? = 10$, dus 8 want $8 + 2 = 10$.

Op basis van deze wetenschap kunnen leerlingen dan de vaardigheden ontwikkelen en automatiseren waardoor ze van dubbel tellen loskomen:

- aanvullen tot het tienvoud en aftrekken vanaf een tienvoud;
- verder tellen en terugtellen met sprongen van tien vanaf een willekeurig tienvoud.

Naarmate de leerling, via bovenstaande activiteiten, meer getallen tot 99 'tientallig' aan elkaar kan knopen en zich meer en meer inzichtelijk en flexibel mentaal in de telrij kan bewegen, wordt het gebruik van reeksen getallen als loopplank overbodig.

Bij het aftrekken is niveau 4 bereikt als de leerling problemen zoals die van opgave 5 als volgt schematiseert en oplost:

Opgave 5

- $25 + ? = 36$ via $25 + 5 = 30$ en $30 + 6 = 36$, samen 11;
- $36 - ? = 25$ via $36 - 6 = 30$; $30 - 5 = 25$; samen 11

Vierde niveauverhoging: van rijgen via het tienvoud (niveau 4) naar rekenen met de 10-sprong (niveau 5)

Hoe leren leerlingen direct vanaf een willekeurig getal met sprongen van 10 aan te vullen en af te trekken? En: hoe staat deze manier van rijgen in verband met het gebruik van de tienvouden en als knooppunten dat tellen met tien en enen in de hand werkt?

Leerlingen moeten tot de ontdekking komen, dat hij niet eerst naar het tienvoud moet springen om met de 10-sprong te kunnen rijgen, 'omdat' alle getallen tientallig zijn opgebouwd én geordend. Leerlingen kunnen als volgt, op hun niveau van denken, er achter komen. Elk getal bestaat uit zoveel groepen van tien en zoveel enen. 32 is bijvoorbeeld 'evenveel' als 10, 20, 30, dus drie groepen van 10 en 1, 2, twee eenheden. Met de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 en 9 kunnen tien getallen met drie groepen van 10 worden gemaakt: Bijvoorbeeld 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39. Het getal 40 staat dan 10 stappen verder dan het getal 30, omdat 40 tien meer is dan 30. Dit geldt voor alle getallen: 41 ligt 10 verder dan 31, omdat het 10 meer is dan 31 zoals 65 10 verder ligt dan 55 omdat het één tiental meer heeft dan 55 en zoals 88 10 verder ligt dan 78. Vanuit dit begrip van de relatie tussen de *telgetallen* (volgorde: ordinaliteit) en de *hoeveelheidsgetallen* (inhoud: kardinaliteit) kunnen leerlingen de vaardigheid automatiseren die nodig is om vlot met de 10-sprong af te trekken: verder springen en terugspringen vanaf een willekeurig samengesteld getal, bijvoorbeeld (32), 42, 52, 62 etc., en (67), 57, 47, 37, etc.

Een leerling heeft niveau 5 bereikt als hij opgave 5 en opgave 9 als volgt schematiseert en uitrekent:

Opgave 5: $36 - 25$ via (36) $\rightarrow$ 26, 16; $16 - 5 = 11$

Opgave 9: $48 + ? = 100$ via (48) $\rightarrow$ 58, 68, 78, 88, 98 $\rightarrow$ 100; samen 10, 20, 30, 40, 50, 52

Vijfde niveauverhoging: van rekenen met de 10-sprong (niveau 5) naar rekenen met tienvouden (niveau 6)

De volgende niveauverhoging heeft ingrijpende gevolgen, omdat de telrij die tot dan toe het benodigde houvast verschaftte helemaal op de achtergrond raakt. Leerlingen reduceren namelijk in deze overgangsfase aanvullen en aftrekken tot rekenen met de rekenfeiten die ze kennen. Ze leren hiervoor handig gebruik te maken van de verschillende manieren waarop getallen tot 99 met grote parten kunnen worden samengesteld en in grote parten kunnen worden afgesplitst. Na verloop van tijd vinden leerlingen springen omslachtig, omdat de rekenweg soms zo lang is. Vraagstukken waarbij ze hoeveelheden, lengte, gewichten e.d. moeten samenstellen of, omgekeerd, in (gelijke) parten moeten verdelen, zetten leerlingen op het spoor van kenmerken en structuren van getallen die kunnen worden gebruikt om de gevraagde taken handig en efficiënt uit te voeren. Een voorbeeld hiervan is het samenstellen van 100 liter aarde met zakken van 20 liter of het zagen van boekenplanken van 30 cm uit een stuk van 1 meter lang.

Twee ontdekkingen bewerkstelligen een hoger niveau van denken en rekenen:

- Het begrip dat een getal als 48 uit '4 keer 10 plus 8 keer 1' bestaat (getallen als samengestelde producten);
- Het begrip dat ze dan samengestelde eenheden van 10 (40 in het geval van 48) als eenheden kunnen gebruiken om aan te vullen en af te trekken: $48 + ? = 100$ via $48 + 50$, denkend aan $40 + 50 = 90$, want $4 + 5 = 9$.

Onderstaande voorwaarden bepalen hoe snel de leerling de sprong naar structurerend rijgen kan maken:

- het routinematig samenstellen en structuren van getallen in de vorm van $? \times 10 + ? \times 1$:
 $3 \times 10 + 2 \times 1 = 32$; $48 = 4 \times 10 + 8 \times 1$
- de reconstructie en memorisatie van de benodigde rekenfeiten, teruggrijpend op de geheugenfeiten tot 10:
 $60 = 30 + 30$ én $50 + 10$ of $10 + 50$; $80 = 40 + 40$ én $80 = 50 + 30 = 30 + 50$; etc.
- het leren gebruikmaken van de inverse relatie tussen geheugenfeiten en de verwissel-eigenschap van optellen:
 $80 - 50 = 30$ en $80 - 50 = 30$ want $50 + 30 = 80$

Een leerling heeft niveau 6 bereikt als hij bijvoorbeeld de getallen van opgave 9 zodanig afsplitst, dat hij met samengestelde eenheden aanvult of aftrekt met behulp van geheugenfeiten:

$$48 + ? = 10 \text{ via } 48 + 40 = 88; 88 + 2 + 10 = 100; \text{ samen } 40 + 10 + 2 = 52$$

$$48 + ? = 100 \text{ via } 48 + 50 = 98; 98 + 2 = 100; \text{ samen } 52$$

$$100 - 48 = ? \text{ via } 100 - 40 = 60 \text{ (want } 60 + 40 = 100) \text{ en } 60 - 8 = 52 \text{ (want } 52 + 8 = 60)$$

Zesde niveauverhoging: van structurerend rijgen (niveau 6) naar gestandaardiseerd rijgen (niveau 7)

Als de leerling aftrekopgaven structurerend kan aftrekken, kan hij zich puur op de automatisering en veralgemenisering van de geleerde rijprocedures concentreren. Dit proces hangt af van de mate waarin de leerling greep krijgt op de tientalligheid van het systeem van hele getallen. Vanuit dit perspectief bezien, komt rijgen uiteindelijk neer op het handig optellen en aftrekken met geheugenfeiten, waarbij je gebruikmaakt van analogie, de verdeel-eigenschap en verwissel-eigenschap van optellen en de inverse relatie tussen optellen en aftrekken. Het doet er niet toe met welke 'eenheden' de leerling optelt of aftrekt. Telkens weer gebruikt hij dezelfde getal-structuren, eigenschappen van optellen en analoge geheugenfeiten. Leerlingen hebben een lange weg te gaan eer ze dit niveau van begrip en vaardigheid hebben bereikt, zoals dat uit de analyse van het niveau van rijgen in paragraaf 8.3 zal blijken.

Figuur 8.10 Formalisering van de rijgprocedures

NIVEAU III – Systeemgebonden, op basis van rekeneigenschappen				
Tientalligheid: analogie van $40 + 50$ met $4 + 5$ en $400 + 500$ Negen rijgschema's voor aftrekken		Optellen en aftrekken volgens vaste rijgschema's	Gestandaardiseerd	7
NIVEAU II – Contextgebonden, op basis van getalrelaties				
Relaties tussen samengestelde ronde eenheden ($48 + 50 = 98$ denkend aan $40 + 50 = 90$ en $4 + 5 = 9$)	Optel- en aftrekoperaties symboliseren een verandering of relatie	Optellen en aftrekken met tienvouden	Structurerend	6
Lineair-decimale relaties tussen de getallen: $48 \rightarrow 58, 68, 78, 88, 98, 100$		Verder springen en terugspringen met de 10-sprong vanaf een willekeurig getal	Lineair-decimaal (b)	5
Lineair-decimale relaties tussen de getallen: $48 \rightarrow 50 \rightarrow 60, 70, 80, 90, 100$	De afstand tussen getallen in de telrij representeert de verandering of de relatie	Springen naar het dichtstbijzijnde tienvoud en verder springen / terugspringen met de 10-sprong	Lineair-decimaal (a)	4
Elke getal kan met twee andere getallen in optel- of aftrekrelaties worden gecombineerd: $12 + 13 = 25$ of $25 - 12 = 13$ of $25 = 12 + 13$	Een passende reeks opgezegde telwoorden representeert de verandering of de relatie	Dubbel tellen	Tellend (b)	3
Een term maakt deel uit van het totaal: je krijgt 25 als je een stapel van 12 tot een van 25 'uitbreidt'. 12 is een deel van 25	Gesymboliseerde telstappen representeren de verandering of de relatie	Doortellen tot / terugtellend (tot) vanaf een willekeurig getal	Tellend (a)	2
NIVEAU I – Handelingsgebonden, met behulp van verzamelingen objecten				
Geen relatie tussen de getallen van de rekensituatie	Elk object representeert óf een eenheid van een term óf een eenheid van het totaal	Uitbeelden met verzamelingen objecten	Figuratief	1
Gebruikte structuur	Representatie van de verandering of relatie	Procedure	Niveau van formalisering	

NIVEAU III – Systeemgebonden, op basis van rekeneigenschappen

7		$48 + ? = 100$ via • $48 + 50 = 98$; $98 + 2 = 100$; $50 + 2 = \mathbf{52}$ • $48 + 2 = 50$; $50 + 50 = 100$; $50 + 2 = \mathbf{52}$ $100 - 48 = ?$ via $100 - 40 = 60$; $60 - 8 = \mathbf{52}$	$62 - 48 = ?$ via $62 - 40 = 22$ $22 - 8 = \mathbf{14}$
---	--	---	---

NIVEAU II – Contextgebonden, op basis van getalrelaties

6		$48 + ? = 100$ via • $48 + 40 = 88$; $88 + 2 = 90$; $90 + 10 = 100$; $40 + 10 + 2 = \mathbf{52}$; $100 - 48 = ?$ via $100 - 20 = 80$; $80 - 20 = 60$; $60 - 8 = \mathbf{52}$	$62 - 48 = ?$ via • $62 - 30 = 32$; $32 - 10 = 22$; $22 - 8 = 20 - 6 = \mathbf{14}$ • $62 - 20 = 42$; $42 - 20 = 22$; $22 - 8 = 20 - 6 = \mathbf{14}$
5		$48 + ? = 100$ via • $(48) \rightarrow 58(10), 8(20), 78(30), 88(40), 98(50)$ en 2 erbij is $\mathbf{52}$; $100 - 48 = ?$ via $(100) \rightarrow 90, 80, 70, 60$; 8 eraf is 59, 58, (...) $\mathbf{52}$	$62 - 48 = ?$ via • $(62) \rightarrow 52, 42, 32, 22$; $22 - 8$ via $22 - 2 = 20$ en $20 - 6 = \mathbf{14}$; $48 + ? = 62$ via • $48 + 10 = 58$; $58 + 4 = 62$; $10 + 4 = \mathbf{14}$
4	$12 + ? = 25$ via • $12 + 8 = 20$; $20 + 5 = 25$; $5 + 8 = \mathbf{13}$	$48 + ? = 100$ via • $48 + 2 = 50 \rightarrow 60, 70, 80, 90, 100$; samen: 10, 20, 30, 40, 50 en 2 erbij is $\mathbf{52}$	$62 - 48 = ?$ via • $62 - 2 = 60$; $60 - 40 \rightarrow 50, 40, 30, 20$; $20 - 6 = \mathbf{14}$; $48 + ? = 62$ via $48 + 2 = 50$; $50 + 10 = 60$; $60 + 2 = 62$; $10 + 2 + 2 = \mathbf{14}$
3	$12 + ? = 25$ via 13(1), 14(2), 15(3), 16(4), 17(5), 18(6), 19(7), 20(8), 21(9), 22(10), 23(11), 24(12), 25(13)	48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100	
2	$12 + ? = 25$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 $\rightarrow \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet \bullet$	25	

NIVEAU I – Handelingsgebonden, met behulp van verzamelingen objecten

1	13 		
Niveau	Opgave 1	Opgave 9	Opgave 12
	Voorbeeldoplossingen		

8.3 Actueel niveau van formalisering

Onderzoeksvraag

Op welk niveau van formalisering rijgen de leerlingen uit de vaardigheidsgroepen Laag, Midden en Hoog?

Vaststellen op welk niveau een leerling rijgt is erg lastig, omdat het niveau waarop een opgave rijgend wordt uitgerekend direct afhangt van de mogelijkheden die de getallen van de opgaven bieden (zie ‘analyse’ hieronder). Leerlingen rekenen dus telkens op verschillende niveaus en presteren dan ook vaak verschillend, afhankelijk van de getallen en de gekozen aanpak (zie aan het einde van dit hoofdstuk: Hoe ‘rijgers’ met verschillende rijgschema’s op verschillende niveaus van formalisering flexibel hoofdrekenen). Een grote groep leerlingen kan problemen als die van opgave 1 vrij snel met het kortste rijgschema uitrekenen ($12 + 10 = 22$ erbij 3 is 25, dus samen 13 of $25 - 10 = 15$ en $15 - 2 = 13$). Dezelfde leerlingen hebben daarentegen meer tijd nodig (en de ene leerling veel meer dan de andere) om een aftrekking als $62 - 48$ structurerend uit te rekenen ($62 - 30 = 32$; $32 - 10 = 22$; $22 - 8$ via $20 - 6 = 14$), laat staan met behulp van het meest gestandaardiseerde rijgschema ($62 - 40 = 22$; $22 - 8 = 14$). In onderstaande paragraaf wordt aangegeven hoe het niveau van formalisering is vastgesteld.

Analyse

Het actuele niveau van formalisering wordt vastgesteld op het niveau van de drie vaardigheids-groepen en niet op het niveau van de individuele leerlingen. De 2131 geobserveerde aftrek-oplossingen zijn in onderstaande categorieën gecodeerd en gesorteerd:

- dubbel tellend: niveau 2 en 3 in figuur 8.10;
- lineair-decimaal: niveau 4 en 5;
- structurerend: niveau 6;
- gestandaardiseerd: niveau 7.

Niet alle opgaven kunnen op het hoogste niveau van formalisering worden uitgerekend. De getallen én de gevolgde aftrekstrategie bepalen immers of de leerling structurerend (met tienvouden) of gestandaardiseerd (kortste gestructureerde rekenweg) kan rijgen. De rijgoplossingen zijn daarom vergeleken op basis van de getalkenmerken en de gevolgde strategie, zoals aangegeven in figuur 8.11.

De meeste waarnemingen betreffen het rijgen in situaties waar de aftrekker groter is dan 10 en het verschil kleiner dan 20 (opgaven 5, 6, 8, 11 en 12) en waar de aftrekker en het verschil groter zijn dan 19 (opgaven 13, 14, 15 en 17). Deze oplossingen geven dan ook de meest informatieve aanwijzingen over de mate van formalisering van het rijgen halverwege de basisschool. De resultaten van de analyse worden hieronder per vaardigheidsgroep en per rekenconditie gepresenteerd en in de conclusie aan elkaar gerelateerd.

Figuur 8.11 Sorteerschema voor het vaststellen van het niveau waarop de rijgprocedures zijn geformaliseerd

Gebied	Getalkenmerken	Opgaven *	Hoogst bereikbare niveau van formalisering
Tot 100	Aftrekker en verschil t/m 19	1 en 2	Tot en met niveau 5 bij alle drie de strategieën
	Aftrekker >19 en verschil t/m 19	5, 6, 8, 10, 11 en 12	Tot en met niveau 5 bij <i>optellen tot</i> en <i>afrekken tot</i>
		5, 6, 8, 10, 11 en 12	Tot en met niveau 7 bij <i>afrekken</i>
Tot 100	Aftrekker en verschil > 19	3, 4 en 9	Tot en met niveau 7 bij alle drie de strategieën
> 100		13, 14, 16 en 17	
* Alleen de opgaven in de grijze cellen kunnen via de vermelde aftrekstrategie op het meest formele niveau van rijgen worden uitgerekend (niveau 6 en 7).			

Resultaten

Groep Laag

In de resultaten van de groep Laag (figuur 8.12) tekent zich de volgende trend af:

- Er wordt relatief vaak dubbel geteld, tussen 4% en 25% van de oplossingen.
- Opgave 5, 6 en 11 en opgave 3, 4 en 9 worden in respectievelijk 67% en 75% van de oplossingen op het gestandaardiseerde niveau aftrekkend (of overbruggend) uitgerekend. Het prestatieniveau is hoog. Het gemiddelde totaal aantal goede antwoorden bedraagt 82% bij het gestandaardiseerd uitrekenen van de opgaven 5, 6 en 11 en 87% bij het uitrekenen van de opgaven 3, 4 en 9.
- Het percentage correcte antwoorden laat ten slotte zien dat lineair-decimaal rijgen niet structureel wordt beheerst (tussen 50% en 84% goed) en dat de leerlingen die structurerend rijgen vaak een fout maken (slechts 29% – 33% goed).

Figuur 8.12 Percentage oplossingen en goede antwoorden per niveau van formalisering in de groep Laag

Opgaven	Dubbel tellen		Lineair-decimaal		Structurerend		Gestandaardiseerd		Totaal
	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	
1 en 2 (A & O)	25	71	75	80					100%
5, 6 en 11 (O)	9	64	91	84					100%
5, 6 en 11 (A)	11	33	15	50	7	33	67	82	100%
3, 4 en 9 (A & O)	4	60	14	69	6	29	75	87	100%
A = Aftrekken; O = Overbruggen; grijze cellen: de getallen maken rijgen op dit niveau onmogelijk									

Groep Midden

De resultaten van de groep Midden worden in figuur 8.13 gepresenteerd. Deze resultaten geven vier aanwijzingen:

- Dubbel tellen wordt slechts bij uitzondering toegepast.
- Bij het gros van de oplossingen in het getalgebied tot 100 (opgave 6, 8, 10, 11 en 12), rijgt de leerling structurerend, maar vooral gestandaardiseerd (tussen 80% en 90%).
- Rijen met getallen groter dan 100 (opgave 13) wordt daarentegen vooral structurerend uitgevoerd (80%) en in maar iets meer dan één op de tien oplossingen met een gestandaardiseerd rijgschema.
- Ook in deze groep maken leerlingen die (nog) structurerend rijgen regelmatig fouten, terwijl de gestandaardiseerde rijghandelingen zeer goed worden beheerst (88% en 94%). Lineair-decimaal rijgen wordt ten slotte bij overbruggen zeer goed uitgevoerd, maar niet bij aftrekken (93% tegen 50% bij opgave 6, 8, 10, 11 en 12).

Figuur 8.13 Percentage oplossingen en goede antwoorden per niveau van formalisering in de groep Midden

Opgaven	Dubbel tellen		Lineair-decimaal		Structurerend		Gestandaardiseerd		Totaal
	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	
6, 8, 10, 11, 12 (O)	1	100	99	93					100%
6, 8, 10, 11, 12 (A)	0	nvt	4	50	17	80	79	88	100%
9 (A & O)	0	nvt	7	25	3	50	90	94	100%
13 (A & O)*	0	nvt	7	100	80	67	13	75	100%

A = Aftrekken; O = Overbruggen; grijze cellen: de getallen maken rijgen op dit niveau onmogelijk

Groep Hoog

De resultaten in de groep Hoog (figuur 8.14) weerspiegelen enerzijds de ervaring die deze leerlingen hebben opgedaan met het voorgelegde type opgaven en anderzijds de invloed van de gekozen strategie.

Bij de opgaven 6, 11 en 12 kan hooguit lineair-decimaal worden geregen, als de opgave overbruggend wordt opgelost. Omdat niemand meer dubbel telt, worden alle oplossingen lineair-decimaal gevonden.

Leerlingen die deze opgaven aftrekkend oplossen, kunnen daarentegen tot op het hoogste niveau rijgen. Dit gebeurt in maar 50% van de oplossingen. In de overige 50% wordt er vrijwel uitsluitend structurerend geregen. Opgave 9 wordt daarentegen vrijwel uitsluitend op een gestandaardiseerde manier uitgerekend, namelijk in 97% van de gevallen. De invloed van de strategie is in dit geval zeer groot, omdat de betreffende leerlingen in 26 van de 36 oplossingen aanvullend hebben opgeteld in plaats van af te trekken.

Het opmerkelijkste resultaat van deze analyse is dat de leerling in ruim de helft van de oplossingen van opgaven met getallen groter dan 100 met gestandaardiseerde rijgprocedures rekt, terwijl dergelijke opgaven nog niet structureel in het onderwijs aan de orde zijn gekomen. De toegepaste rijgschema's leiden bovendien in 88% van de gevallen tot de juiste uitkomst. Dit geldt ook voor structurerend rekenen dat vrijwel even vaak de juiste uitkomst oplevert.

Wat het rekenen tot 100 betreft, valt op dat iedereen die opgave 9 structurerend uitrekenet de juiste uitkomst vindt en dat lineair-decimaal rijgen optimaal wordt beheerst (100%).

Figuur 8.14 Percentage oplossingen en goede antwoorden per niveau van formalisering in de groep Hoog

Opgaven	Lineair-decimaal		Structurerend		Gestandaardiseerd		Totaal
	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	Freq. in %	% goed	
6, 11, 12 (O)	100	100					100%
6, 11, 12 (A)	3	100	49	90	48	97	100%
9 (A & O)	0	nvt	3	100	97	100	100%
13, 14, 16, 17 (A & O)*	1	67	45	86	54	88	100%

* = rekenen boven de 100; A = Aftrekken; O = Overbruggen; grijze cellen: de getallen maken rijgen op dit niveau onmogelijk

Conclusie

Uit bovenstaande resultaten kunnen twee conclusies worden getrokken:

- Sommige leerlingen en vooral leerlingen uit de groep Laag moeten het rijgen tot 100 nog optimaal formaliseren.
- Er tekenen zich grote verschillen af tussen deze leerlingen en groepsgenoten die al met gestandaardiseerde rijgschema's getallen groter dan 100 kunnen bewerken.

Leerlingen uit de groep Laag hebben het rekenen tot 100 nog onvoldoende geformaliseerd. Er doen zich drie structurele problemen voor:

- Een kleine minderheid moet het dubbel tellen nog tot lineair-decimaal rijgen transformeren en vervolgens vlot leren uitvoeren.
- Het lijkt erop dat een tweede groep leerlingen zich in de overgangsfase bevindt van lineair-decimaal rijgen naar structurerend rijgen. Deze leerlingen hebben leertaken nodig die hen in staat stellen om het springen in de telrij te veranderen in optellen en aftrekken met tienvouden.
- Leerlingen die begrijpen hoe dit structurerend rijgen werkt, moeten minstens de meest functionele rijgschema's automatiseren en al doende standaardiseren.

Ook in de groep Midden kunnen ongetwijfeld leerlingen worden geïdentificeerd die het springen bij optellen en aftrekken aan het veranderen zijn. Deze leerlingen kunnen dat samen met hun minder vaardige klasgenoten leren doen en automatiseren. Aan de andere kant van de schaal bevinden zich leerlingen die al op het niveau van jaargroep 6 rijgen. De vraag die opkomt, is hoe de leraar adequaat op deze enorme verschillen in rekenniveau kan (c.q. moet) reageren.

8.4 Samenhang tussen vaardigheidsniveau en niveau van formalisering

Onderzoeksvraag

In hoeverre hangt het niveau van formalisering samen met het vaardigheidsniveau van de leerling?

Analyse

Om een indruk te kunnen geven van de samenhang tussen het vaardigheidsniveau van de leerling en het niveau van het rijgen zijn een aantal opgaven geselecteerd en geanalyseerd. Deze analyse is puur indicatief, omdat het aantal beschikbare rijgoplossingen zo klein is. Drie vergelijkingen kunnen worden gemaakt:

- Laag versus Midden op basis van de oplossingen van opgave 1 en opgaven 6 en 11;

- Midden versus Hoog op basis van de oplossingen van opgaven 11 en 12 en die van opgaven 9 en 13;
- Laag versus Midden versus Hoog op basis van de oplossingen van opgave 6 en die van opgave 9.

De resultaten van deze vergelijkingen worden alleen met staafgrafieken weergegeven om het verkennende karakter van deze analyse te benadrukken.

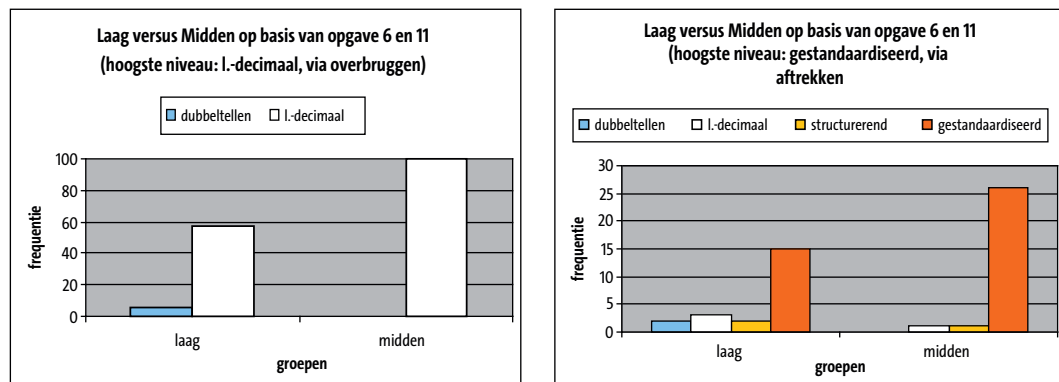
Resultaten

Laag versus Midden

In de resultaten van de drie uitgevoerde vergelijkingen tekent zich de volgende tendens af:

- Er wordt in beide groepen vooral lineair-decimaal geregen. In de groep Laag worden enkele opgaven dubbel tellend opgelost.
- In de aftrekoplossingen van opgaven 6 en 11 van de groep Midden wordt er beduidend vaker met gestandaardiseerde rijgprocedures gerekend (zie figuur 8.15).

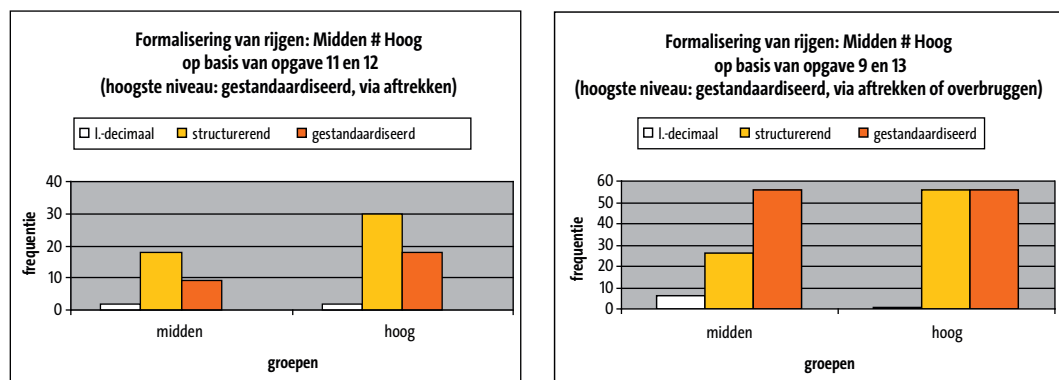
Figuur 8.15 Vergelijking van de formalisering in de groep Laag en Midden op basis van de oplossingen van de opgaven 6 en 11



Midden versus Hoog

De uitgevoerde vergelijkingen laten geen relevant verschil zien tussen het niveau van formalisering van het rijgen in de groepen Midden en Hoog bij het oplossen van opgaven 11 en 12 enerzijds (gestandaardiseerd via aftrekken) en opgave 9 en 13 anderzijds (gestandaardiseerd via aftrekken of overbruggen) (zie de staafdiagrammen van figuur 8.16).

Figuur 8.16 Vergelijking van de formalisering in de groep Midden en Hoog op basis van de oplossingen van de opgaven 11 en 12 en 9 en 13

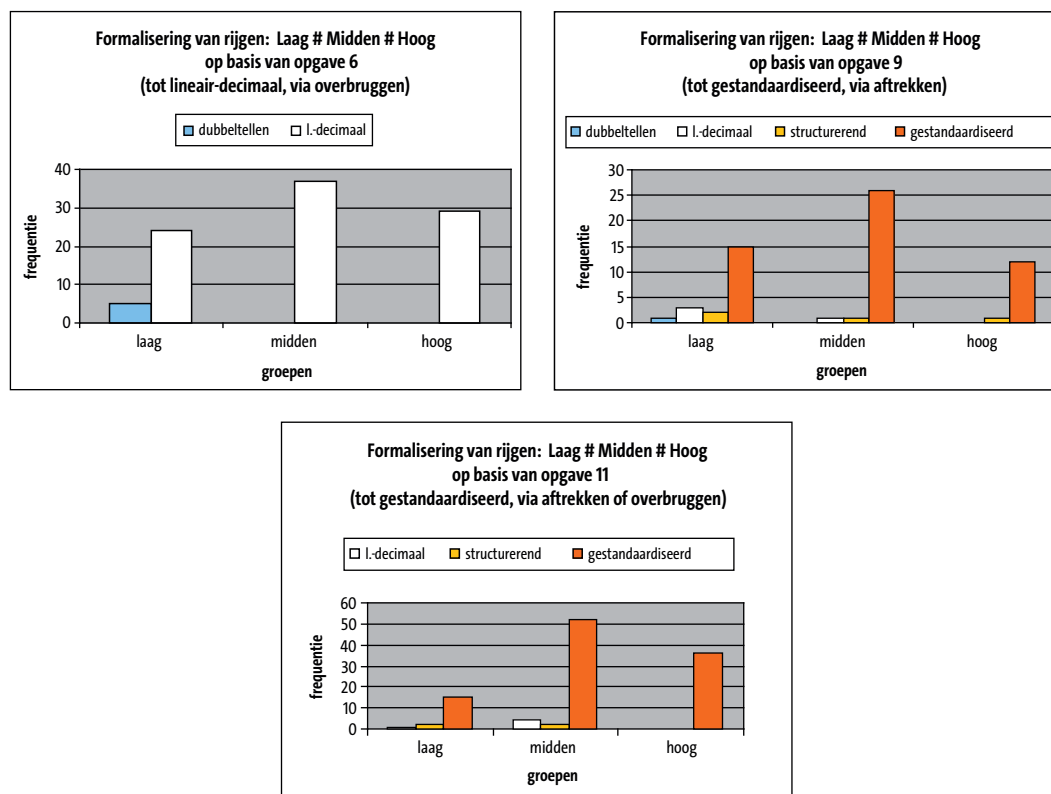


Laag versus Midden versus Hoog

De uitgevoerde vergelijkingen bevestigen de eerder gevonden tendensen (zie figuur 8.17):

- Leerlingen die dubbel tellen maken deel uit van de groep Laag;
- Er wordt, onder de condities van opgaven 6 en 9, in de groep Midden even vaak gestandaardiseerd geregen als in de groep Hoog en vaker tot beduidend vaker dan in de groep Laag.

Figuur 8.17 Vergelijking van de formalisering in de groepen Laag, Midden en Hoog op basis van de oplossingen van de opgaven 6, 9 en 11



Concluderend kan worden gesteld dat de invloed van het vaardigheidsniveau tot uitdrukking komt in de frequentie van het gebruik van dubbel tellen enerzijds en de mate waarin gestandaardiseerde rijprocedures worden toegepast. Kenmerkend voor leerlingen uit de groep Laag is, dat ze nog regelmatig dubbel tellen en dat ze hun rijprocedures nog moeten standaardiseren.

8.5 Aandachtspunt

Bovenstaande resultaten roepen de vraag op hoe om te gaan met de verschillen tussen leerlingen (Gravemeijer en Van Eerde, 2004), omdat de geobserveerde verschillen veel groter zijn dan de verschillen die didactici als bijvoorbeeld Menne (2001) accepteren voor een, didactisch gezien, zinvol en effectief gebruik. De leerling die op het laagste niveau rijgt, rekt immers als een leerling begin jaargroep 4, terwijl de leerling die op het hoogste niveau rijgt niet onder doet voor een gemiddelde leerling medio jaargroep 6.

Vanuit de gekozen invalshoek kan voorlopig, in algemene zin, worden gesteld dat de leraar leeractiviteiten moet kiezen die de verschillende groepen leerlingen in staat stellen om de stap naar het eerstvolgende niveau van rijgen te maken. Dit veronderstelt dat hij vaststelt hoe deze leerlingen in de regel rijgen en welke vaardigheden ze nog moeten verwerven om de eerst

De rapportage van de analyse van de gemaakte rijgfouten in hoofdstuk 9 concretiseert de hierboven aangekaarte afstemmingsproblematiek (maatwerk).

Hoe de getallen van de opgaven bepalen of de leerling wel of niet structurerend en vervolgens gestandaardiseerd kan rijgen

Mogelijke oplossingsniveaus van opgaven met een aftrekker en een verschil tot en met 19			
Opgave 1 (*)	Lineair-decimaal rijgen met		
Strategieën	G10	Eerst eenheden	A10
Aftrekken	25 – 12 25 – 10 = 15 en 15 – 2 = 13	25 – 12 25 – 2 = 23 en 23 – 10 = 13	25 – 12 25 – 5 = 20; 20 – 7 = 13
Optellen tot	Van 12 naar 25 12 + 10 = 22; 22 + 3 = 25; 10 + 3 = 12	Van 12 naar 25 12 + 3 = 15; 15 + 10 = 25; 3 + 10 = 13	Van 12 naar 25 12 + 8 = 20; 20 + 5 = 25; 5 + 8 = 13
Aftrekken tot	Van 25 naar 12 25 – 10 = 15; 15 – 3 = 12; 10 + 3 = 13	Van 25 naar 12 25 – 3 = 22; 22 – 10 = 12; 3 + 10 = 13	Van 25 naar 12 25 – 5 = 20; 20 – 8 = 12; 5 + 8 = 13
Mogelijke oplossingsniveaus van opgaven met een aftrekker >19 en een verschil tot en met 19			
Opgave 8 (*)	Lineair-decimaal rijgen met		
Strategieën	G10	Eerst eenheden	A10
Aftrekken	50 – 32 (50) → 40, 30, 20 en 20 – 2 = 18	50 – 32 50 – 2 = 48 → 38, 28, 18	n.v.t.
Optellen tot	Van 32 naar 50 32 + 10 = 42; 42 + 8 = 50; 10 + 8 = 18	Van 32 naar 50 Komt overeen met A10	Van 32 naar 50 32 + 8 = 40; 40 + 10 = 50; 8 + 10 = 18
Aftrekken tot	Van 50 naar 32 50 – 10 = 40; 40 – 8 = 32; 10 + 8 = 18	Van 50 naar 32 50 – 8 = 42; 42 – 10 = 32; 8 + 10 = 18	n.v.t.
Structurerend rijgend met			
Strategieën	G10	Eerst eenheden	A10
Aftrekken	50 – 32 50 – 30 = 20 en 20 – 2 = 18	50 – 32 50 – 2 = 48; 48 – 30 = 18	
Optellen tot	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Aftrekken tot	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Mogelijke oplossingen van opgaven met een aftrekker én een verschil >19			
Opgave 9 (*)	Lineair-decimaal rijgen met		
Strategieën	G10	Eerst eenheden	A10
Aftrekken	100 – 48 (100) → 90, 80, 70, 60; 60 – 8 = 52	100 – 48 100 – 8 = 92 → 82, 72, 62, 52	n.v.t.
Optellen tot	Van 48 naar 100 (48) → 58, 68, 78, 88, 98 én 2 erbij is samen 10, 20, 30, 40, 50, 52	Komt overeen met A10	Van 48 naar 100 48 + 2 = 50 → 60, 70, 80, 90, 100; samen 10, 20, 30, 40, 52
Aftrekken tot	Van 100 naar 48 (100) → 90, 80, 70, 60, 50; 2 eraf is 48; samen 10, 20, 30, 40, 50, 52	Van 100 naar 48 100 – 2 = 98 → 88, 78, 68, 58, 48; samen 10, 20, 30, 40, 50, 52	n.v.t.
Structurerend rijgend met			
Strategieën	G10	Eerst eenheden	A10
Aftrekken	100 – 48 100 – 40 = 60 en 60 – 8 = 52	100 – 48 100 – 8 = 92 en 92 – 40 = 52	n.v.t.
Optellen tot	Van 100 naar 48 48 + 50 = 98; 98 + 2 = 100, dus 52	Komt overeen met G10	Van 100 naar 48 48 + 2 = 50; 50 + 50 = 100, dus 52
Aftrekken tot	Van 100 naar 48 100 – 50 = 50; 50 – 2 = 48, samen 52	Van 100 naar 48 100 – 2 = 98; 98 – 50 = 48; samen 52	n.v.t.
(*) Oplossingen in grijze vakken zijn geobserveerd			

Hoe 'rijgers' met verschillende rijgschema's op verschillende niveaus van formalisering flexibel hoofdrekenen

Leerling 247 (LVS-M5, LAAG)					
Voorbeeldopgave	Strategie	Rijgsprocedure	Denkniveau	Formalisering	Oplossingswijze
1	Optellen tot	eG10	II	lineair-decimaal	12 + erbij 3 is 5, dus nog 10 erbij. 3 erbij 10 is 13 (De leerling vult aan door eerst te zorgen dat ze de 5 van 25 krijgt. Rekent dus : (12 + 3) + 10 uit).
2	Optellen tot	A10	II	lineair-decimaal	Het antwoord is 4. Zegt dat ze de 4 er in één keer bij deed.
3	Optellen tot	A10	III	gestandaardiseerd	25! 25 + 5 = 30 dan nog 20 erbij is 50
4	Optellen tot	G10	III	gestandaardiseerd	25! 60 – 30 = 30. Verder naar 20, nog 5 eraf is 25
5	Optellen tot	A10	II	lineair-decimaal	25 erbij 10 is 35. Nog 1 erbij. Samen 11
6	Optellen tot	A10	II	lineair-decimaal	16! 24 + 6 = 30 + 10 = 16
9	Optellen tot	A10	III	gestandaardiseerd	32! Oh! Dat is verkeerd! 52! Haar uitleg: bij 8 nog 2 is 50 (48 + 2 = 50) en nog 50 erbij is 100
11	Optellen tot	A10	III	gestandaardiseerd	12 bij 90; 10 erbij. Toen moest ik er nog 2 bij. Samen 12
Leerling 5 (LVS-M5, MIDDEN)					
Voorbeeldopgave	Strategie	Rijgsprocedure	Denkniveau	Formalisering	Oplossingswijze
6	Aftrekken tot	G10	II	lineair-decimaal	16 euro goedkoper! Eerst 10 eraf en dan nog 6. Van 40 naar 24: 40 – 10 = 30; 30 – 6 = 24; 10 + 6 = 16
8	Optellen tot	G10	II	lineair-decimaal	18 euro. 32 plus 10 plus 8, samen 18
9	Optellen tot	A10	III	gestandaardiseerd	Je doet plus 2 en plus 50. 52!
10	Aftrekken	e G10	III	gestandaardiseerd	100 – 86. 100 – 6 = 94 en 94 – 80 = 14
11	Aftrekken tot	A10	II	lineair-decimaal	102 – 2 = 100 ; 100 – 10 = 90 ; dus 12
12	Aftrekken	e G10	III	gestandaardiseerd	62 – 8 = 54 ; 54 – 40 = 14
Leerling 172 (LVS-M5, HOOG)					
Voorbeeldopgave	Strategie	Rijgsprocedure	Denkniveau	Formalisering	Oplossingswijze
6	Optellen tot	G10	II	lineair-decimaal	24 + 10 = 34 + 6 = 40 antwoord 16
9	Optellen tot	G10	III	gestandaardiseerd	In boekje opgeschreven: 48 + 50 = 98 + 2 = 100, dus 52
11	Optellen tot	A10	II	lineair-decimaal	In boekje opgeschreven: 90 + 10 = 100 + 2 = 102 Antwoord: 12
12	Aftrekken	G10	III	gestandaardiseerd	In boekje opgeschreven: 62 – 40 = 22 – 8 = 14
13	Optellen tot	G10	II	structurerend	In boekje opgeschreven: 189 + 10 = 199 + 1 = 200 + 50 = 250 Antwoord: 61
14	Optellen tot	G10	III	gestandaardiseerd	Van 350 naar 620 In boekje opgeschreven: 370 + 200 = 570 + 30 = 600 + 20 = 620 Antwoord: 250
16	Optellen tot	A10	III	gestandaardiseerd	In boekje opgeschreven: 595 + 5 = 600 + 300 = 900
17	Aftrekken tot	A10	II	structurerend	Van 1662 naar 998 1662 – 62 = 1600 – 600 = 1000 – 2 = 998 Antwoord: 664

9 Minder rijgfouten met pen en papier

Een vijftigtal rijgfouten uit een bestand van ruim 200 oplossingen geeft een behoorlijk inzicht in de aard en de bron van de structurele fouten die leerlingen uit jaargroep 5 bij rijgend aftrekken maken. Leerlingen die nog steeds dubbel tellen moeten deze handeling zo snel mogelijk in rijgen met sprongen zien te veranderen. Leerlingen die met sprongen rijgen verliezen vaak het overzicht of maken slordigheidsfouten, vooral bij aanvullend optellen, omdat ze uit het hoofd rekenen en niets op papier zetten.

9.1 Inhoud

In dit hoofdstuk wordt verslag gedaan van de uitgevoerde foutenanalyse op basis van een aantal opgaven die de leerlingen in de problemen hebben gebracht. We zijn uitgegaan van de gemeten prestaties bij de analyse van de gebruikte aftrekstrategieën en -procedures (hoofdstuk 7) en van het niveau van formalisering van de toegepaste rijghandelingen (hoofdstuk 8). We rapporteren de gevonden aanwijzingen over de kernproblemen die leerlingen uit jaargroep 5 bij rijgen ondervinden.

We verantwoorden eerst kort de keuze van de geanalyseerde oplossingswijzen alvorens de resultaten en aandachtspunten te presenteren.

9.2 Onderzochte oplossingen

De gemeten prestaties bij dubbel tellen, rijgen via een tienvoud en rijgen met de 10-sprong en/of tienvouden in combinatie met overbruggen en aftrekken hebben de volgende aanwijzingen gegeven over de problemen die leerlingen uit jaargroep 5 ondervinden:

- In de groep Laag maken leerlingen structureel fouten als zij *dubbel tellen* en als ze met de 10-sprong of tienvouden aanvullend optellen.
- In de groep Midden maken leerlingen structurele fouten, als de aftrekstrategie wordt toegepast.
- Leerlingen uit de groep Hoog beheersen de rijghandelingen in het getalgebied tot 100. Er worden echter in die groep regelmatig fouten gemaakt bij *rijgen via een honderdvoud* en *rijgen met honderdvouden* in combinatie met *optellen* tot en *aftrekken* bij de bewerking van getallen groter dan 100.

Op basis van deze indicaties zijn foutieve oplossingswijzen van acht opgaven geselecteerd (zie figuur 9.1) om de aard en de bron van de geobserveerde rijgfouten te identificeren.

Figuur 9.1 Geanalyseerde foutieve oplossingen per getalgebied en gebruikte rijgprocedure

Vaardigheidsgroep	Strategieën en procedures	Opgaven
Laag	Twee keer tellen Aftrekken via optellen tot	3 en 9 3 en 6
Midden	Aftrekken met de 10-sprong	5, 6 en 9
Hoog	Aftrekken via optellen tot Aftrekken met de 10-sprong	13, 14 en 17 13 en 16

9.3 Onderzoeksvragen

De geselecteerde foutieve oplossingen worden vanuit de vier onderstaande vragen rekenkundig geanalyseerd.

Met betrekking tot de rijgprestaties in de groep Laag

- 1 Wat is het structurele probleem bij tellend rijgen?
- 2 Wat is het kernprobleem bij aanvullend optellen?

Met betrekking tot de rijgprestaties in de groep Midden

- 3 Hoe komt het dat de leerlingen de aftrekhandelingen nog niet optimaal beheersen?

Met betrekking tot de rijgprestaties in de groep Hoog

- 4 Maken de meest vaardige leerlingen bij rijgen met getallen groter dan 100 dezelfde structurele fouten als de fouten die bij het rijgen tot 100 worden gemaakt?

9.4 Analyse

Onderstaande typen foutieve oplossingen zijn geanalyseerd.

- Laag: twee keer tellen (opgaven 3 en 9);
- Laag: aftrekken via optellen tot (opgaven 3 en 6);
- Midden: aftrekken met de 10-sprong (opgaven 5, 6 en 9);
- Hoog: aftrekken via optellen tot (opgaven 13, 14 en 17);
- Hoog: aftrekken met de 10-sprong (opgaven 13 en 16).

We presenteren hieronder per vaardigheidsgroep en per vraag de resultaten van de analyse, vatten telkens de kern samen in concluderende opmerkingen en organiseren ten slotte deze bevindingen in de gebruikte foutenmatrijs (figuur 9.4).

9.5 Resultaten

9.5.1 Groep Laag

Wat is het structurele probleem bij tellend rijgen?

In vier van de negen oplossingen van opgave 3 en 9 die tellend zijn opgelost komt de leerling tot een foutieve uitkomst.

Geobserveerde fouten. In een aantal protocollen ontbreekt de informatie die nodig is om de oplossingswijze van de geobserveerde leerling precies na te doen. De aard en de bron van de fouten blijft hierdoor verborgen. Op basis van de beschikbare aantekening en het gegeven antwoord vermoeden we dat de betreffende leerlingen falen omdat ze bepaalde vaardigheden niet onder de knieën hebben (categorie 'procedurele vaardigheden') en omdat de telhandelingen onoverzichtelijk zijn ('oplossingsproces').

Procedurele vaardigheden

De voorbeelden hieronder signaleren twee typen telfouten

• *Akoestisch tellen of synchroon symboliseren en opzeggen*

In het eerste voorbeeld legt de leerling perfect uit wat hij moet doen, maar symboliseert 24 telstappen in plaats van 25. Een mogelijke verklaring is dat hij één telgetal overslaat door slordigheid of door een gebrekkige automatisering (akoestisch tellen), een tweede dat hij, op een gegeven moment, sneller telt dan tekent (synchroon symboliseren en opzeggen).

Opgave 3: $25 + ? = 50$ (leerling 28)

Schrijft op: '25 tm 50'. Schrijft dan 25 op, laat een ruimte open en schrijft erachter 50.

Telt in het hoofd en zet tellend 24 streepjes tussen 25 en 50:

25 ||||| 50

Zegt: ik pak die 25 van België. Ik tel van 25 tot 50. Dan moet je tellen hoeveel streepjes er staan en dan heb je het antwoord.

Leerling telt eerst in stilte de streepjes en komt tot antwoord 24.

• *Startfout bij doortellen*

Leerling 7 heeft met zijn vingers 26 stappen geteld, één meer dan 25. De kans is dan groot dat hij 25 als eerste stap heeft meegeteld, de zogenoemde startfout:

25(1), 26(2), 27(3), etc. in plaats van (25) → 26(1), 27(2), 28(3)

Opgave 3: $25 + ? = 50$ (leerling 276)

Telt door van 25 naar 50 met de vingers en komt uit op 35.

Opgave 6: $24 + ? = 40$ (leerling 7)

Met de vingers doortellen. De uitkomst is 26: 26 euro goedkoper.

24 aftrekken of optellen tot 40: 25, 26, 27, ..., 40 en dan krijg je 26.

Oplossingsproces. De foutieve oplossing van leerling 276 illustreert de belasting van het werkgeheugen als de leerling over een grote afstand dubbel telt.

- *Verlies van overzicht bij dubbel tellen door belasting van het werkgeheugen*

Met 10 vingers kunnen leerlingen 10 telstappen gemakkelijk bijhouden. Vanaf 11, begint een tweede reeks stappen die het werkgeheugen zwaar belast. Hoe leerling 276 op 35 uitkomt, is niet zeggen, omdat de toetsassistent te globaal heeft geobserveerd.

Opgave 3: $25 + ? = 50$ (leerling 276)

Telt door van 25 naar 50 met de vingers en komt uit op 35.

35 is wel 10 meer dan 25. Wellicht heeft de leerling zich dan vergist bij het, uit zijn geheugen, ophalen van het aantal volle handen dat hij heeft gebruikt om vanaf 25 tot 50 te komen.

Wellicht heeft hij *drie keer twee handen* geteld in plaats van *twee keer*:

(25) → 26 (duim), 27 (wijsvinger), 28 (middenvinger), 29 (ringvinger), 30 (pink)

Twee keer twee handen is samen 20 en nog één hand erbij is 25.

Concluderende opmerkingen. In sommige situaties ligt het voor de hand om *één-twee, één-twee-drie* of *één-twee-drie-vier* uit het hoofd door te tellen. Er is daar niets mis mee, zolang de betreffende leerling normaliter met sprongen rijgt, al dan niet via een tienvoud. Dit geldt zeker voor de leerlingen uit jaargroep 5 die beperkte rekencapaciteiten hebben.

De geïdentificeerde fouten zijn echter door de frequentie, de aard en de gevolgen verontrustend. Er zijn in totaal 30 teloplossingen van niveau 2 (verkort tellen met de vingers of streepjes) of 3 (dubbel tellen) geobserveerd. De uitgevoerde telhandelingen leiden in één op de drie oplossingen tot een foutief antwoord. Deze frequentie en prestatie doen vermoeden dat de problemen bij het leren van fundamentele zaken aan de aandacht van de leraren zijn ontsnapt. Wat dit betreffend zijn de telfouten die leerlingen vermoedelijk maken veelzeggend. Akoestisch tellen (mentaal opzeggen van de telwoorden), synchroon tellen (tegelijktijd opzeggen en schuiven of tekenen) en doortellen zijn fundamentele vaardigheden die leerlingen al in jaargroep 3 moeten automatiseren om inzichtelijk en vaardig tot 20 en 100 te kunnen leren rekenen. Het spreekt vanzelf dat de geobserveerde leerlingen vooral fouten maken, omdat ze over een grote afstand tellen en dat ze waarschijnlijk over een korte afstand correct doortellen. Op dit schoolniveau mag echter niemand meer een startfout maken.

We mogen ten slotte aannemen dat de 'tellers' die (regelmatig) fouten maken tot de groep 10% tot 15% minst vaardige leerlingen behoren. Het is verontrustend dat hun leraren blijkbaar niet tijdig zijn ingegrepen om deze leerlingen te helpen het fundament voor rijgen te leggen (zie hoofdstuk 8). Ze missen dan ook de voorwaardelijke feiten, inzichten en vaardigheden die nodig zijn om, routinematig, met de 10-sprong (via een tienvoud) te leren rijgen (niveau 4 en 5).

Wat is het kernprobleem bij aanvullend optellen? (opgave 3 en 6)

In 34 oplossingen van de groep Laag heeft de leerling opgave 3 en 6 via het tienvoud of met de 10-sprong aanvullend opgeteld. In 10 oplossingen – bijna één op de drie – zijn fouten geïdentificeerd die we hieronder, per categorie, de revue passeren.

Geobserveerde fouten. Uitbeelden van berekeningen op een getallenlijn ondersteunt het denken en de uitgevoerde operaties, ontlast het werkgeheugen en maakt de handelingen controleerbaar. Dit alles vergroot de kans dat de leerling inzichtelijk, efficiënt en correct rijgt. De geobserveerde leerlingen hebben nu zelden hun sprongen op een lijn getekend. Ze hebben in de meeste oplossingen mondeling en uit het hoofd geregen. We kunnen niet vaststellen in welke mate dit het oplossingsproces negatief beïnvloed, omdat de manier waarop het onderzoek is opgezet dit niet toelaat.

We gaan er daarom van uit dat de problemen op het niveau van het begrip en de rekentechnische uitvoering van de rijghandelingen deels te maken hebben met het feit dat de leerlingen vaak zonder enige aantekening op papier (zie hoofdstuk 11) uit het hoofd rekenen.

Begrip

Begrip van aanvullend optellen

Vier typen fouten zijn in deze categorie geïdentificeerd:

- a) foutief gebruik van de 10-sprong;
- b) foutief samen nemen / interpreteren (c.q. samen nemen) van de gemaakte sprongen;
- c) goochelen met getalrelaties;
- d) foutieve interpretatie van de uitgevoerde rijghandelingen.

Foutief gebruik van de 10-sprong

Opgave 6: $24 + 26 = 40$ (leerling 241)

26! Eerst 6 bij is 30. Nog 20 (i.p.v. 10) erbij is 40. Dus 26

Bovenstaand voorbeeld illustreert het foutieve gebruik van de 10-sprong. De leerling springt correct in één handeling naar het dichtstbijzijnde tienvoud (30), maar vult daarna met 20 aan en niet met 10. Een mogelijke verklaring is dat hij aanvult (en niet aftrekt) wetend dat $20 + 20 = 40$ en hierdoor de greep verlies op zijn correcte associatie van $24 + ? = 40$ met $20 + 20 = 40$. De 20 van $20 + 20$ gooit roet in eten.

Onderstaande foutieve oplossingen laten zien wat er mis kan gaan bij het samen nemen van de gemaakte sprongen.

Foutief samen nemen / interpreteren van de gemaakte sprongen

Opgave 6: $24 + 26 = 40$ (leerling 261)

$24 + 6 = 30 + 10 = 26$. Het antwoord is 26

Opgave 3: $25 + 35 = 50$ (leerling 282)

Eerst 5 erbij, dat is 30. Dan doe ik er nog 10 bij, dat is 40 en dan nog 10. Antwoord 35

Opgave 3: $25 + 35 = 50$ (leerling 252)

35. Ik heb er 20 bijgeteld en daarna 5, is 25 of eh ... 35.

In het voorbeeld van opgave 6 telt leerling 261 zes bij twintig op ($6 + 20 = 26$) in plaats van 6 en 10 samen te nemen. Een mogelijke verklaring is dat hij 24 in $20 + 4$ heeft gesplitst om te vinden dat hij 6 bij 24 moet optellen om tot 30 te komen ($24 + 6 = 30$ want $4 + 6 = 10$).

Leerling 252 weet natuurlijk dat $25 + 5 = 25$. Hij raakt waarschijnlijk op een vergelijkbare manier in de war in het netwerk van getalrelaties die hij gebruikt om, conform de gekozen rijgschema, het gevraagde aantal zegels te vinden: $25 + 20 = 45$ en $45 + 5 = 50$. Wellicht verklaart de wetenschap dat $20 + 30 = 50$ en de associatie van 35 met $30 + 5$ uiteindelijk keuze voor 35.

Verwarring tussen getal als knooppunt en getallen als operator

Opgave 6: $24 + 14 = 40$ (leerling 277)

Bij de blouse van 24 euro, 20 erbij... Nee! 30 bij, plus 30.. Van die 4, nog 8 bij, zit je op de 40, plus 8. Dan heb je er 38 bijgedaan

Opgave 6: $24 + 14 = 40$ (leerling 280)

Zegt: dan moet je die ook 40 maken: 10 erbij, $24 + 10 = 30$, nee 34! Dan doe ik er nog 8 bij: erbij 8.

Even tellen!... Dan doe ik er 14 in totaal bij: 10 erbij 34, dan nog 8 erbij, dat is dan 40. 14 in totaal erbij.

In boekje: $24 + 10 = 34 + 8 = 40$

Bovenstaande voorbeelden illustreren het goochelen met getalrelaties door het gebruik van optelfeiten om de aanvulhandelingen te structureren. Beide leerlingen realiseren zich dat $224 + 20$ meer is dan 40. De opmerking van leerling 277 – Nee! 30 bij, plus 30 – doet vermoeden dat hij ‘dertig’ als tussenantwoord met ‘dertig’ als operator verwacht:

van 24 naar 30 (knooppunt) # € $24 + 30$ (operator).

Dit zou kunnen betekenen dat, in deze fase van het leerproces, deze leerling nog niet scherp voor ogen houdt wat het verschil maakt tussen *optellen* aan de ene kant en aanvullend optellen aan de andere kant.

Wat er hierdoor precies misgaat is, door gebrekkige observatiegegevens, niet te zeggen. Vast staat dat hij – evenals leerling 280 in het tweede voorbeeld – met getalrelaties goochelt, zoals leerlingen bij splitsen met cijfers goochelen.

Foutief interpreteren van de gemaakte sprongen

Opgave 3: $25 + 30 = 50$ (leerling 289)

Ik tel weer door (zoals bij opgave 2). Bij België begin ik! 25 plus 5 is 30; 30 plus 20 is 50. Ze schrijft eerst niets op en raakt in de war. Daarna wel. Ze komt er nu ook achter dat ze een telfout maakt, maar geeft 30 als antwoord.

De oplossing van leerling 289 laat zien ten slotte een voorbeeld zien van een foutieve interpretatie van de uitgevoerde aanvulhandelingen, als leerlingen het overzicht kwijt raken van wat ze aan het doen zijn. Hij geeft een tussenantwoord als antwoord.

Wat in alle bovenstaande voorbeelden opvalt, is enerzijds dat de leerling niet bewust is van een gemaakte misstap omdat hij uit het hoofd rekt en anderzijds dat hij zich niet realiseert dat zijn uitkomst niet kan kloppen. Dit richt de aandacht op factoren die fouten van de categorie ‘oplossingsproces’ verklaren.

Oplossingsproces

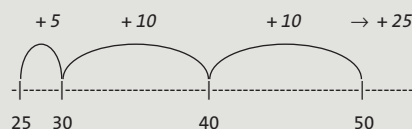
Dat leerlingen zich vaak niet bewust worden van een misstap kan betekenen dat het werkgeheugen te zwaar wordt belast. De leerling mist dan de steun van een schriftelijke notatie die aanvankelijk wordt gebruikt om te leren rijden.

Dat de leerlingen zich niet realiseren dat hun uitkomst niet kan kloppen doet vermoeden dat ze niet met verstand van aanvullen rekenen en dat ze, in elk geval meer inzichtelijker zouden kunnen rijden, als zij hun aanvulhandelingen met streepjes en bogen op een getallenlijn zouden uitbeelden.

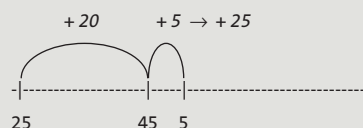
Modellering van enkele besproken foutieve oplossingen met sprongen op een lege getallenlijn

Opgave 3: $25 + ? = 50$

Leerling 282: eerst 5 erbij, dat is 30. Dan doe ik er nog 10 bij, dat is 40 en dan nog 10. Antwoord 35



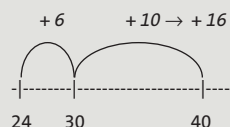
Leerling 252: 35! Ik heb er 20 bijgeteld en daarna 5, is 25 of eh ... 35.



Opgave 6: $24 + ? = 40$

Leerling 261: $24 + 6 = 30 + 10 = 26$. Het antwoord is 26.

Leerling 277: Bij de blouse van 24 euro, 20 erbij...Nee! 30 bij (+ 30). Van die 4, nog 8 bij, zit je op de 40 (+ 8). Dan heb je er 38. Bijgedaan: 38



We vermoeden, om dezelfde reden, dat de leerling de geobserveerde slordigheidsfouten niet zou hebben gemaakt als hij met pen en papier had aangevuld.

Slordigheidsfouten bij opgave 6

$24 + 14 = 40$ (leerling 282)

Ik doe eerst erbij 6 is 30 en dan 10 erbij. Dan is het 14.

$24 + 26 = 40$ (leerling 252)

26! Ik heb er 20 bijgedaan...

Juf: en dan krijg je...

Leerling: dan kom je op 34 en dan nog 6 erbij, zo kom ik op 26 (24 erbij 10 erbij 6 is 26)

$24 + 26 = 40$ (leerling 241)

26 eerst 6 bij is 30. Nog 20 (i.p.v. 10) erbij is 40. Dus 26

Concluderende opmerkingen. Samenvattend, kan worden vastgesteld dat leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep problemen ondervinden bij aanvullend optellen, omdat ze hun weg kwijtraken bij het koppelen van het ene getal aan het andere. Dit kan het gevolg zijn van:

- het gebrek aan inzicht in het verschil tussen 'optellen' en 'aanvullen';
- de associatie met een geheugenfeit dat wordt gebruikt om de aanvulhandelingen te schematiseren en uit te voeren;
- het niet noteren van de rekenstappen op papier.

Gevonden aanwijzingen. Figuur 9.2 geeft een overzicht van de structurele fouten die we in de groep Laag hebben geïdentificeerd. Per categorie wordt tevens aangegeven waar de bron van de betreffende fouten moet worden gezocht

Figuur 9.2 Aard en bron van de fouten in de rijgoplossingen van de groep Laag

	Fout	Bron
Begrip van 'aanvullen'	• foutief aanvullen met de 10-sprong • foutief samennemen van de gemaakte sprongen • goochelen met getalrelaties • tussenantwoord als eindantwoord	• verwarring tussen optellen en aanvullend (getal als tussenuitkomst en getal als operator) • verwarring door de associatie van de getallen van de opgaven met de getallen van die gebruikt worden om de rijhandelingen te structureren
Procedurele vaardigheden	• vergissing bij opzeggen en tegelijkertijd symboliseren van de telstappen bij doortellen over een grotere telafstand • starfout bij doortellen	• dubbel tellen • gebrekkige automatisering: - akoestisch tellen - synchroon tellen
Oplossingsproces	• foutieve telling van de gemaakte telstappen	Uit het hoofd rekenen zonder aantekening op papier: - belasting van het werkgeheugen - gebrek aan overzicht op uitgevoerde handelingen - moeilijk om achter te controleren

De resultaten van de foutenanalyse geven drie belangrijke aanwijzingen. Leerlingen die nog regelmatig over een grote afstand tellend rijgen (niveau 2 of 3) lopen het risico dat ze nog meer achterstand opbouwen (zelfs afhaken), als de leraar hen niet in de gelegenheid stelt om een steviger fundament voor rijgen te leggen (zie de 3e niveauverhoging in hoofdstuk 8). In dit verband wijzen de begripsfouten die leerlingen bij aanvullend rijgen met de 10-sprong of tienvouden uit dat ze nog niet goed genoeg begrijpen wat de overeenkomst en het verschil is tussen optellen aan de ene kant en aftrekken aan de andere kant, laat staan wat de relatie is tussen de drie strategieën die ze voor aftrekken kunnen gebruiken: *afrekken* in relatie tot *optellen tot* en *afrekken tot*. Dit betekent dat leraren uit jaargroep 5 de groep minst vaardige leerlingen gericht moet helpen onderzoeken wat in de aftrekoplossingen 'hetzelfde' is en wat 'anders' en hoe het komt dat de verschillende aanpakken en handelingen tot dezelfde uitkomst leiden.

Uitbeelden op een lege getallenlijn is de beste manier om daar achter te komen (Gravemeijer, 2005). Het mes snijdt aan twee kanten. Leerlingen begrijpen de relaties tussen *samenstellen*, *optellen*, *aanvullen*, *afhalen* en *vergelijken* via het uitbeelden met sprongen op een lege getallenlijn. Ze ontwikkelen al doende een 'rekentaal' (notatiewijze) waarmee ze hun rekenstappen op een overzichtelijke manier kunnen structureren en, achteraf, gemakkelijk kunnen controleren. Dit zou talloze fouten kunnen voorkomen die leerlingen uit de groep Laag maken, omdat ze uit het hoofd proberen te rijgen.

9.5.2 Groep Midden

Hoe komt het dat de leerlingen de aftrekhandelingen nog niet optimaal beheersen? (opgave 5, 6 en 9)

In 28 oplossingen heeft de leerling opgave 5, 6 of 9 rijgend met de 10-sprong of tienvouden aftrekkend opgelost. In 9 gevallen is er een onjuiste uitkomst gevonden (1/3 van de oplossingen). We laten de typen geobserveerde fouten, per categorie, de revue passeren.

Begrip. Er zijn twee typen fouten geïdentificeerd die gemaakt worden bij het bewerken van de eenheden: het verwarren van de *rest* met de *aftrekker* en verkeerd compenseren. We lichten deze fouten kort toe.

• Bewerking van de eenheden

Verwarring van de rest met de aftrekker (het getal dat afgetrokken wordt)

Opgave 9: $40 - 24 = 24$ (leerling 278)

Eerst $24 + 40$. Eerst 20 erbij, daarna 6 erbij (poging met aanvullend optellen).

Nee! ... 24 moet eraf! 20 eraf en daarna 6 eraf is 24 euro.

Foutieve compensatie bij het aftrekken van de eenheden

Opgave 9: $40 - 24$ (leerling 106)

40 eraf 24; 10 eraf = 30; 10 eraf = 20; 5 eraf = 15; 1 eraf = 14

De voorbeeldoplossing van leerling 278 illustreert het verwarren van de rest met de aftrekker. Deze leerling trekt eerst correct 20 van 40 af, vervolgens trekt hij 6 van 20 af in plaats van $20 - 4$ uit te rekenen. Waarschijnlijk verwacht wat hij overhoudt (6) met wat hij weghaalt (4). Dit komt wellicht door het gebruik $6 + 4 = 10$ om $20 - 6$ uit te rekenen.

Leerling 106 toont de compensatiefout die leerlingen maken bij het handig aftrekken van de eenheden. In dit geval gebruikt de leerling $20 - 5 = 15$ om $20 - 4$ uit te rekenen en corrigeert in de verkeerde richting: $15 - 1 = 14$ in plaats van $15 + 1 = 16$.

Procedurele vaardigheden. De afgedrukte oplossingen tonen de geobserveerde typen tel- en rekenfouten.

Telfout bij dubbel tellen

Opgave 9: $100 - 48$ (leerling 299)

Zegt en schrijft $100 - 40$

Symboliseert de rekenstappen met sprongen van 10 in eigen pijlentaal:

$100 - 40 \rightarrow 10 \rightarrow 10 \rightarrow 10 \rightarrow 10$ dus 90, 80, 70, 60

Dan $60 - 8$ via terugtellen met sprongen van één: $60 - 1 = 59$, $59 - 1 = 58$

Tekent vervolgens 8 bolletjes om de stand bij te kunnen houden en telt verder terug: $58 - 1 = 57$, $57 - 1 = 56$ tot $54 - 1 = 53$.

Per stap wordt een balletje weggestreept. Het antwoord is 53

Opgave 9: $100 - 48$ (leerling 271)

$100 - 40 = 60$; $60 - 8 = 54$ via één voor één terugtellen

Onjuist aftrekken van een tienvoud

Opgave 9: $40 - 24$ (leerling 1)

40 eraf 20; dan nog 4 eraf. Antwoord 24

Leerling 272

24! $40 - 20 = 20 - 4 = 14$

- Telfout

Leerling 299 en 271 maken beiden een telfout bij het terugtellend aftrekken van de eenheden. De eerste leerling rijgt op niveau 2 (verkort tellen met objecten), de tweede op niveau 3 (dubbel tellen).

- Rekenfout

In de afgedrukte voorbeelden maken de leerlingen de twee typen fouten die in de middengroep zijn geobserveerd bij het aftrekken van eenheden vanaf een tienvoud. In het eerst geval koppelt de leerling het af te trekken getal aan het tienvoud ($20 - 4 = 24$). De tweede leerling gebruikt waarschijnlijk $6 + 4 = 10$ om $20 - 4$ uit te rekenen en koppelt 4 aan het resterende tental ($20 - 4 = 14$) in plaats van 6 ($20 - 4 = 16$)

Oplossingsproces. De geobserveerde fouten wijzen uit dat de leerling deels door een gebrekkig overzicht over (c.q. controle op) zijn handelingen en deels door slordigheid foutief rijgt.

Gebrekkig overzicht

Opgave 9: $40 - 24$ (leerling 130)

Oh! ... Euh... Ik snap het niet! Leest het verhaal uit zichzelf weer op. 40 eraf 24, dat is ... Eerst $40 - 20 = 20$ en dan nog 4 eraf. 20 eraf 4 en dat is 39, 38, 37, 36, dus de uitkomst is 36.

Slordigheidsfout: overgeslagen deel van het rekenschema

Opgave 9: $40 - 24$ (leerling 16)

$40 - 20 = 20$

- Gebrekkig overzicht

Het eerste voorbeeld is een typisch geval van een gebrekkig overzicht over de uitgevoerde rekenstappen. De leerling telt terug vanaf 40 in plaats van vanaf 20!

- Slordigheidsfout

Het tweede voorbeeld is even pregnant. De leerling slaat het tweede deel van het aftrekschema over.

Gevonden aanwijzingen. Figuur 9.3 geeft een overzicht van de structurele fouten die we in de groep Midden hebben geïdentificeerd. Per categorie wordt tevens aangegeven waar de bron van de betreffende fouten moet worden gezocht

Figuur 9.3 Aard en bron van de fouten in de rijgoplossingen van de groep Midden

	Fout	Bron
Begrip van aftrekken van de eenheden	• het verwarren van de <i>rest</i> (wat je overhoudt) met de <i>aftrekker</i> (<i>het getal de je aftrekt</i>) • verkeerd compenseren	• verwarring tussen optellen en aftrekken, mede als gevolg van het gebruik van optelfeiten of af te trekken aantallen • begrip van de relatie tussen aftrekrelaties • begrip van 'compenseren' en van hoe het in aftreksituaties werkt
Procedurele vaardigheden	• telfouten bij verkort tellen • rekenfout	• automatisering van dubbel tellen • automatisering van aftrekken vanaf een tienvoud ($20 - 4$, $30 - 5$, $50 - 8$) In relatie met • begrip van de inverse relatie: $20 - 4 = 16$ want $16 + 4 = 20$
Oplossingsproces	• het overslaan van een deel van de aftrekhandelingen • terugtellen vanaf een verkeerd getal om de eenheden af te trekken	uit het hoofd rekenen zonder aantekening op papier: - belasting van het werkgeheugen - gebrek aan overzicht op uitgevoerde handelingen - moeilijk om achteraf te controleren

De gevonden fouten geven twee aanwijzingen voor de verklaring van de matige beheersing van aftrekken in de middengroep:

- leerlingen trekken nog regelmatig de eenheden tellend af, omdat ze niet inzichtelijk, met één handeling, vanaf een tienvoud kunnen aftrekken of deze rijghandeling onvoldoende hebben geautomatiseerd (fundament en automatisering van lineair-decimaal aftrekken op niveau 4 en 5);
- het rekenen uit het hoofd wekt slordigheidsfouten (symbolisering ter ondersteuning van de uitvoering en de controle van de rekenstappen).

Leerlingen die niet inzichtelijk – vanaf elk willekeurig tienvoud – eenheden in één handeling kunnen aftrekken, moeten één voor één terugtellen en blijven steken op een te laag niveau van rijgen. Een bijkomend probleem is dat sommige leerlingen weten dat ze te veel kunnen aftrekken om een handig rekenfeit te kunnen gebruiken ($20 - 4$ via $20 - 5 = 15$) maar onvoldoende vertrouwd zijn met de formele relatie tussen de optelrelaties om te begrijpen wat 'compenseren' is en hoe het werkt.

Wat het overzicht en de controle betreft, bevestigen de geobserveerde oplossingen hoe belangrijk het is dat leerlingen aantekeningen op papier maken. Dit verkleint de kans op slordigheidsfouten en biedt bovendien de mogelijkheid om de uitgevoerde rekenstappen, achteraf, nog eens kritisch te bekijken en zonodig te herstellen.

Voorbeeld

$$\begin{array}{rcl}
 40 - 24 = & \text{24} & \text{20} & \text{40} \\
 40 - 20 = & & & \\
 20 - 4 = & & &
 \end{array}$$

9.5.3 Groep Hoog

Maken de meest vaardige leerlingen bij rijgen met getallen groter dan 100 dezelfde structurele fouten als de fouten die bij het rijgen tot 100 worden gemaakt?

- **Aftrekken via optellen tot (opgave 13, 14 en 17)**

In 165 oplossingen zijn de opgaven 13, 14 en 17 aanvullend optellend uitgerekend. Dit heeft in 22 gevallen tot een onjuiste uitkomst geleid. Daarbij zijn de volgende typen fouten geobserveerd:

Begrip. De geïdentificeerde fouten hangen samen met het verworven begrip van de getallen met drie cijfers. Twee voorbeelden daarvan worden hieronder gepresenteerd en toegelicht.

Getalbegrip

Onderstaande voorbeelden tonen de invloed van het verworven inzicht in de getallen met drie en vier cijfers op de oplossing van aftrekproblemen via aanvullend optellen.

Fouten bij aanvullend optellen door gebrekkig getalbegrip

Opgave 17: $998 + \underline{602} = 1.662$ (leerling 75)

$98 + 2 = 1.000$; 16 tienden of zo; 600; 602, zoiets!

Opgave 17: $998 + \underline{64} = 1662$ (leerling 290)

$998 + 2 = 1.000$; 62 erbij; $62 + 2 = 64$, 64 is de uitkomst.

Opgave 17: $998 + \underline{660} = 1662$ (leerling 295)

$998 + 4 = 1.002$ $1.002 + 60 = 1062 + 600 = 1662$; 660 is de uitkomst.

Opgave 13: $189 + 370 + 230 = 262$ (leerling 12)

$80 + 20 = 100$; $180 + 20 = 200 + 40 = 240 + 9 = 249 + 1 = 250$; $20 + 40 = 60$; $60 + 9 = 69 + 1 = 50$

Opgave 14: $370 + \underline{330} = 620$ (leerling 200)

De leerling voert achtereenvolgens de volgende stappen uit:

(1) $370 + 30 = 400$; (2) $400 + 200 = 600$; (3) $600 + 20 = 620$; (4) $30 + 400 + 200$ nee! (5) $30 + 200 = 330$ (vergeet de 20).

Een bijkomend probleem in deze foutieve rijgoplossingen is dat de leerlingen uit het hoofd rekenen. Het werkgeheugen wordt dan te zwaar belast om overzicht te houden op wat ze doen en de uitgevoerde handelingen achteraf te kunnen controleren (zie 'oplossingsproces' hieronder).

De drie eerste voorbeelden tonen de directe invloed van het verworven inzicht in het positionele systeem van hele getallen op het inzichtelijk structureren en uitvoeren van aanvulhandelingen. Leerling 290 overziet niet dat 1.662 evenveel is als $1.000 + 662$ en moet daarom 1.662, stukje bij beetje, samenstellen. Omdat hij niet systematisch aanvult met eerst de honderdvouden en vervolgens de tienvouden en eenheden, slaat hij 600 over en geeft hij 64 als uitkomst (in plaats van 664).

Leerling 295 vult eerst tot 1.002 aan om evenveel eenheden te hebben als 1.662. Hij realiseert zich echter niet dat 1.662 evenveel is als $1.002 + 660$ en vult daarom 1.002 aan via 1.062 (erbij 60) en 1.662 (erbij 600). Deze handelingen vergt (mede door het rekenen uit het hoofd) zoveel aandacht dat hij de eerste stap vergeet en 660 in plaats van 664 als uitkomst geeft.

De oplossingen van opgave 13 en 14 tonen de invloed van het getalbegrip op aanvullend rijgen in het getalgebied tot 100. Leerling 12 moet heel veel getallen aan elkaar knopen om van 189 tot 250 te komen, terwijl het in 2 stappen kan: $189 + 11 = 200$ en $200 + 50 = 250$.

Leerling 14 ziet niet in één oogopslag dat 620 evenveel is als $400 + 220$ en moet daarom, stapje voor stapje 620, vanaf 400.

Het werkgeheugen werkt beide leerlingen uiteindelijk part, bij het samennemen van de opeenvolgende optelhandelingen. Het voordeel van aanvullen wordt opgeheven door het nadeel van uit het hoofd rekenen.

Oplossingsproces

In de overige foutieve oplossingen verklaart de belasting op het werkgeheugen de fout die leerlingen uit de groep Hoog bij aanvullend optellen maken. Ze slaan een stukje van de overbrugging over, geven het bereikte getal als antwoord of vergeten één getal bij het uitrekenen van wat ze hebben toegevoegd.

Opgave 13: $370 + 450 = 620$ (leerling 9)

370 erbij 30 is 400, erbij 200, erbij 20 is 450

Opgave 13: $179 + 250 = 250$ (leerling 39)

Je doet eerst 1 erbij en dan nog 10, dan heb je al 200. Dan doe je er nog 25 bij (hij bedoelt 50) en dan heb je 250. Dan: $1 + 10 + 50 = 250$; 250 is het antwoord.

Opgave 14: $370 + 230 = 260$ (leerling 12)

230! 30 bij 370, dan 200 erbij.

In het eerste en tweede voorbeeld geeft de leerling waarschijnlijk, door de belasting op het werkgeheugen, het bereikte totaal als antwoord. In het derde voorbeeld vergeet de leerling van 600 tot 620 aan te vullen en komt daarom 20 tekort.

• **Aftrekken met de 10-sprong en tienvouden (opgave 13 en 16)**

In 41 oplossingen is opgave 13 en 16 via aftrekken honderdvouden en tienvouden uitgerekend. Dit heeft in 10 gevallen tot een onjuiste uitkomst geleid. In deze oplossingen spelen het getalbegrip en de belasting van het werkgeheugen de leerling part. Dit komt tot uitdrukking in de het relatief groot aantal tel- en rekenfouten die leerlingen uit de groep Hoog bij aftrekken maken.

Procedurele vaardigheden in relatie met getalbegrip en oplossingsproces.

Naast één unieke telfout, zijn twee typen rekenfouten geïdentificeerd:

- foutieve aftrekken vanaf een honderdvoud ($150 - 80$);
- verkeerd compenseren

De oplossing van leerling 3 is een uniek voorbeeld van een telfout.

De oplossingen van leerlingen 36, 99, 120 en 11 laten zien dat leerlingen getallen flexibel moeten kunnen samenstellen en structureren om vlot, vanaf een honderdvoud, te kunnen aftrekken.

In het eerste voorbeeld wil de leerling 80 van 100 aftrekken en komt er niet uit. Dit probleem is analoog aan terugspringen vanaf een tienvoud bij aftrekken tot 100, dat hierboven aan de orde

is geweest. Nu is de plaats van de getallen in de telrij tot 1000 in het geding, in relatie tot de opbouw van deze getallen.

Hetzelfde type probleem doet zich in het tweede en derde voorbeeld voor, als de leerling respectievelijk 90 van 400 en 95 van 400 aftrekt. De uitkomst is dan respectievelijk 410 in plaats van 310 en 495 in plaats van 395.

Telfout

Opgave 16: $900 - 495 = 304$ (leerling 3)

Eerst 500 van 900 af is 400; van 400, 5 eraf is 394; dan 90 eraf is 304.

Rekenfouten

Basisoperaties: aftrekken vanaf een honderdvoud

Opgave 13: $250 - 180 = 169$ (leerling 36)

Ik doe eerst $250 - 100 = 150$; dan doe ik er 80 af. Dat is 170 (moet 70 zijn); dan nog 9 eraf is 169 (Dit moet zijn $70 - 9 = 61$)

Opgave 13: $250 - 180 = 139$ (leerling 99)

$250 - 50 = 200$; $200 - 100 = 100$; $80 - 50 = 30$ (wil $100 - 80$ uitrekenen). 139

Opgave 16: $900 - 495 = 405$ (leerling 120)

$- 595 = - 500 - 90 - 5$

$900 - 500 = 400$; 90 eraf is 410, 5 eraf is 405

Opgave 16: $900 - 495 = 405$ (leerling 111)

$900 - 500 = 400$; $400 - 95 = 495$

Onjuiste compensatie

Opgave 13: $250 - 189 = 59$; leerling 84

$250 - 100 = 150$; $150 - 90 = 60$ via $150 - 50 - 40$ en nog die 1 eraf is 59 (had $60 + 1$ moeten zijn)

Leerling 111 maakt een fout die analoog is aan de fout die minder vaardige leerlingen uit jaargroep 4 (en 5) met getallen kleiner dan 100 maken: $400 - 495$ is 95, zoals $20 - 4 = 24$.

Leerling 84 maakt ten slotte hetzelfde type compensatiefout als leerling 106 uit de middengroep. Hij rond 189 af, trekt 190 van 250 af en compenseert in de verkeerde richting:

$250 - 100 = 150$; $150 - 90 = 60$ via $150 - 50 - 40$ en nog die 1 eraf is 59 (had $60 + 1$ moeten zijn)

Gevonden aanwijzingen. Figuur 9.4 geeft een overzicht van de structurele fouten die we in de groep Hoog hebben geïdentificeerd. Per categorie wordt tevens aangegeven waar de bron van de betreffende fouten moet worden gezocht.

Figuur 9.4 Aard en bron van de fouten in de rijgoplossingen van de groep Hoog

	Fout	Bron
Begrip van de getallen met drie cijfers	• foutief aanvullen met honderdvouden, tienvouden en eenheden • de optelhandelingen worden foutief samengenomen	• inzicht in de tientallige opbouw van de getallen met meer dan twee cijfers en in deze relatie tussen deze opbouw met de uitspraak en de notatie van deze getallen • hoofdrekenen zonder aantekeningen op papier
Oplossingsproces	• een deel van het gebruikte aftrekschema wordt overgeslagen • het aangevulde getal wordt als uitkomst gegeven • de optelhandelingen worden foutief samengenomen	• uit het hoofdrekenen: - belasting van het werkgeheugen - gebrek aan overzicht op uitgevoerde handelingen - moeilijk om achteraf te controleren
Procedurele vaardigheden bij aftrekken	• foutief aftrekken vanaf een tienvoud • onjuist compenseren	

De resultaten van de foutenanalyse wijzen uit dat typen fouten die leerlingen bij rijgend aftrekken tot 100 maken bij rijgen tot 1000 terugkomen. Deze fouten hangen samen met enerzijds het beschikbare getalbegrip en anderzijds met het feit dat leerling zonder pen en papier hoofdrekent.

Het beperkte inzicht in de tientalligheid en het positionele karakter van ons getalsysteem komt tot uitdrukking in de omslachtige foutieve aanvuloplossingen van opgave 17.

Dat de leerlingen nog volop bezig zijn de getallen tot 1.000 te organiseren komt tot uitdrukking in fouten die leerlingen maken bij (a) het stapsgewijs aanvullen / aan elkaar knopen van getallen en (b) het aftrekken vanaf een honderdvoud.

We moeten echter twee aantekeningen bij deze aanwijzingen maken. Leerlingen uit de groep *Hoog* hebben ten eerste boven het niveau van het aanbod gerekend, in die zin dat aftrekken in het getalgebied tot 100 pas in de tweede helft jaargroep 5 (c.q. de eerste helft van groep 6) expliciet aan de orde komt. Ze hebben ten tweede in de meeste gevallen uit het hoofd gerekend. Dat ze hoofdzakelijk fouten maken die kunnen worden voorkomen door rekenstappen of tussenantwoorden te noteren is, zonder meer, een prestatie van de bovenste plank.

9.6 Aandachtspunten

Bovenstaande resultaten richten de aandacht op drie kwesties:

- niveauverhoging als doel van maatwerk;
- geïntegreerde aanpak van getallen en hoofdrekenen;
- ontwikkeling van een functionele schriftelijke rijgtaal.

Niveauverhoging als doel van maatwerk

De geïdentificeerde fouten geven ondubbelzinnig aan dat leerlingen uit de groep *Laag*, *Midden* en *Hoog* verschillend moeten worden ondersteund en uitgedaagd om de rijghandelingen die ze nu gebruiken te perfectioneren en te automatiseren. Leraren kunnen hiervoor de beschrijving

van de formalisering van het rijgen (zie hoofdstuk 8) als referentie nemen. Maatwerk moet dan worden gericht op het scheppen van de leercondities die de leerling in staat stellen de eerst haalbare sprong op het eerst volgende niveau van formalisering te maken.

Geïntegreerde aanpak van getallen en hoofdrekenen

De geobserveerde fouten wijzen erop hoe belangrijk het is dat leraren het hoofdrekenen met de reconstructie en organisatie van de getallen integreren. Dit betekent dat de leraar in het aanbod van de gebruikte rekenboeken activiteiten en opdrachten moet selecteren die de aandacht van de leerling richten op die aspecten van getallen en rijghandelingen die voorwaardelijk zijn om de eerstvolgende sprong vooruit te kunnen maken. Maatwerk is, vanuit deze benadering, constructief en niet remediërend. De leraar anticipeert met zijn planning op, vanuit de leerling gezien, haalbare veranderingen en niet op een in te halen achterstand.

Ontwikkeling van een functionele schriftelijke rijgtaal

De geobserveerde fouten wijzen er ten slotte op dat veel rijgfouten te maken hebben met de belasting van het werkgeheugen, omdat leerlingen zoveel uit het hoofd rekenen. Ze verliezen dan ook regelmatig de controle op wat ze doen en slaan daarom rekenstappen of tussen-uitkomsten over of geven tussenuitkomst of het aangevulde getal als uitkomst. De kans dat dit gebeurt, is het grootst als de leerling overbruggend aftrekt, omdat hij telkens alle gemaakte optel- of aftrekstappen moet samennemen. Rijgen met pen en papier zou in die zin kunnen helpen om veel rijgfouten te voorkomen. De kunst is dan om, samen met de leerling, een schriftelijke rekentaal te ontwikkelen die bij het bereikte niveau van denken en rekenen past.

Over splitsend en redenerend aftrekken

- 10 Het tekort aan eenheden spoort aan om splitsen te formaliseren
- 11 Afsplitsen en compenseren: het kernprobleem bij redenerend aftrekken

10 Het tekort aan eenheden spoort aan om splitsen te formaliseren

In één op de 10 geobserveerde aftrekoplossingen rekent de leerling de uitkomst van het probleem of de kale aftrekking splitsend uit. Deze uitkomst is in de ene helft van de oplossingen goed en in de andere helft fout. Splitsen levert dan – gemiddeld genomen – 7% van alle correcte uitkomsten op en 16% van alle foutieve uitkomsten. Dit roept meer vragen op dan antwoorden. Deze splitsoplossingen en de gemaakte fouten wijzen hoe dan ook naar twee hoofdproblemen: leerlingen begrijpen de splitsprocedures die ze gebruiken niet goed en maken daarom veel fouten. Ze splitsen bovendien in contexten waar ze beter hadden kunnen rijgen.

10.1 Inhoud

In dit hoofdstuk wordt verslag gedaan van de analyse van de 182 geobserveerde aftrekoplossingen waarin de leerling een splitsprocedure heeft toegepast. Hoe en hoe goed leerlingen halverwege de basisschool splitsen en welke problemen ze daarbij ondervinden, is vanuit de vier onderstaande vragen onderzocht:

1. Welke strategie volgen de leerlingen als ze splitsend aftrekken en wat zijn de prestaties per gevolgde strategie?
2. Hoe vaak worden de twee geleerde splitsprocedures gebruikt en hoe presteren de leerling met de gebruikte splitsprocedures?
3. Is het mogelijk om op basis van de geobserveerde splitsberekeningen te beschrijven hoe leerlingen hun oorspronkelijke splitshandelingen formaliseren? En: op welk niveau splitsen leerlingen uit de groep Laag, Midden en Hoog halverwege de basisschool?
4. Welke structurele fouten maken leerlingen bij splitsend aftrekken?

10.2 Aftrekstrategie

Onderzoeksvraag

Welke aftrekstrategie volgen de leerlingen als ze splitsen?
Wat zijn de prestaties per gevolgde strategie?

Onderzochte aftrekstrategieën

Sinds rekenoplossingen worden onderzocht, komt splitsend aftrekken, in vergelijking met rijgend aftrekken, telkens slecht uit de bus. De resultaten van het laatst uitgevoerde experiment (Klein, 1998) roepen de volgende vragen op met betrekking tot de oorzaken van fouten bij hoofdrekenen:

- in hoeverre maken leerlingen fouten, omdat ze hun aanpak niet adequaat afstemmen op de context en de getallen van de opgave (afstemming van de aftrekstrategie);
- in hoeverre worden fouten gemaakt, omdat de uitgevoerde rekenhandelingen niet goed passen bij de gevolgde strategie (afstemming van de procedure op de strategie);
- in hoeverre komen de fouten uit beide ‘misfit’ voort? (Beishuizen, 1997)

Zoals eerder gezegd, heeft de Leidse onderzoeksgroep zogenoemde ‘verschilopgaven’ als middel gebruikt om te onderzoeken hoe leerlingen leren rekening houden met de context of de getallen om zo kort en gemakkelijk mogelijk af te trekken. Dit experiment gaf twee aanwijzingen met betrekking tot de adequaatheid van rijgen en splitsen voor de oplossing van dergelijke verschilopgaven en de mate waarin ‘rijgen’ en ‘splitsen’ met *optellen* tot en *aftrekken* ‘fit’:

- Leerlingen uit jaargroep 5 die verschilopgaven met behulp van splitsprocedures aanvullend optellend oplosten, waren in de regel minder succesvol dan leerlingen die de afstand tussen de getallen rijgend overbruggen (Beishuizen, Van Putten en Van Mulken, 1997).
- In de loop van het experiment, maakten hoe langer hoe meer ‘splitsers’ de overstap van splitsen naar rijgen.

Ervoeren de splitsers dat *splitsend aanvullen* niet bij de opgaven paste of dat deze handelingen te omslachtig waren? Zo vroeg zich Beishuizen, naar aanleiding van deze resultaten, af (1997, p. 146).

De geobserveerde rijgoplossingen hebben aangetoond dat leerlingen uit jaargroep 5 hun rijghandelingen deels op de context en deels op de getallen afstemmen (zie hoofdstuk 7).

De geobserveerde splitsoplossingen zijn nu geanalyseerd om vast te stellen in welke mate ze ook ‘strategisch’ splitsend aftrekken. We lichten hieronder deze analyse kort toe.

Analyse

De gebruiksfrequentie van ‘aftrekken’ en ‘optellen tot’ is op basis van de 182 geobserveerde oplossingen van de 15 voorgelegde aftrekopgaven vastgesteld. In de tabel van figuur 10.1 zijn de opgaven per type context geordend. Per regel staan de twee operaties die de leerlingen kunnen uitvoeren, links de aftrekking, rechts de optelling.

Figuur 10.1 De twee alternatieve splitsaanpakken van de voorbeeldopgaven

Opgaven	Betekenis van aftrekken	Aftrekstrategieën	
		Aftrekken	Optellen tot
1	Aanvullen	$25 - 12 = ?$	$12 + ? = 25$
5		$36 - 25 = ?$	$25 + ? = 36$
8		$50 - 32 = ?$	$32 + ? = 50$
11		$102 - 90 = ?$	$90 + ? = 102$
17		$1.662 - 998 = ?$	$998 + ? = 1.662$
2	Verschil bepalen	$22 - 18 = ?$	$18 + ? = 22$
6		$40 - 24 = ?$	$24 + ? = 40$
13		$250 - 189 = ?$	$189 + ? = 250$
3	Part bepalen	$50 - 25 = ?$	$25 + ? = 50$
9		$100 - 48 = ?$	$48 + ? = 100$
14		$620 - 370 = ?$	$370 + ? = 620$
16	Afhalen	$900 - 595 = ?$	$595 + ? = 900$
4*		$60 - 35 = ?$	$35 + ? = 65$
10*		$100 - 86 = ?$	$86 + ? = 100$
12*		$62 - 48 = ?$	$48 + ? = 62$

(*) Kaal aftrekken

De gebruikte aftrekstrategie is in elke splitsoplossing op basis van de twee onderstaande toewijzingsregels gecodeerd:

- de leerling volgt de optelstrategie (*optellen tot*), als hij de opgave met de splitsmethode aanvullend optellend uitrekent;
- de leerling volgt de aftrekstrategie (*afrekken*), als hij splitsend aftrekt of met splitshandelingen terugrekent (*afrekken tot*).

De vetgedrukte operaties van figuur 10.1 symboliseren de strategie die op grond van de beschikbare onderzoeksgegevens wordt verwacht. Leerlingen zullen in ‘aanvul’- en ‘verschil’-contexten eerder *aanvullen* dan *afrekken* (bijvoorbeeld **12 + ? = 25** bij opgave 1 en **18 + ? = 22 bij opgave 2**) en de kale aftrekkingen eerder aftrekkend dan aanvullend optellend uitrekenen, omdat ze het minteken met ‘afhalen’ associëren (bijvoorbeeld **60 – 35**, bij opgave 4).

De vetgedrukte operaties van tabel 10.1 geven deze voorspellingen weer.

De resultaten van deze analyse worden hieronder worden per vaardigheidsgroep gepresenteerd en vervolgens, in een afsluitende samenvatting, met elkaar in verband gebracht.

Resultaten

Groep Laag

Dat opgave 4 ($60 - 35$) in zes oplossingen van de groep Laag splitsend aftrekkend is uitgerekend is al vastgesteld bij de analyse van kaal rekenen (hoofdstuk 6). De overige resultaten die in tabel 10.2 zijn gepresenteerd wijzen uit dat de leerlingen afhankelijk van de context en/of de getallen aanvullend optellen óf afrekken en dat de getallen van de opgave het succes bepalen.

Evenals bij rijgen is er sprake van een ‘tweestrijd’ tussen de context aan de ene kant en de getallen aan de andere kant.

- Bij de oplossing van opgave 1, die heel sterk in de richting van aanvullend optellen wijst, krijgt de context de overhand. Optellen tot ($12 + ? = 25$) wordt drie keer zo vaak toegepast als afrekken, terwijl $25 - 12$ zeer gemakkelijk is om uit te rekenen.
- De zes leerlingen die opgave 2 aftrekkend oplossen maken de bekende omkeringsfout bij het afrekken van de eenheden ($2 - 8$ kan niet, dan doe ik $8 - 2 = 6$). Ze laten zich misleiden door de getallen in die zin dat splitsend afrekken gemakkelijker lijkt dan het in werkelijkheid is.
- In opgave 5 is er sprake van een krappe winst in het voordeel van de getallen. In vier van de negen splitsoplossingen laat de leerling zich door de context leiden, in vijf van de negen door de getallen die zich gemakkelijk splitsend laten bewerken:
Aanvulcontext $\rightarrow 25 + ? = 36$ via $20 + 10$; $5 + 1$, dus 11
Gemakkelijke getallen: $36 - 25$ via $30 - 20 = 10$; $6 - 5 = 1$; samen 11

Opvallend is dat niemand opgaven 3 en 9 splitsend oplost. Wellicht komen leerlingen uit de groep Laag niet op het idee om $50 - 25$ of $25 + ? = 50$ en $100 - 48$ of $48 + ? = 100$ splitsend uit te rekenen, vanuit het ‘gevoel’ (of de ervaring) dat ze dat niet aankunnen.

Figuur 10.2 Gebruik van splitsen in de groep Laag, in combinatie met optellen tot en aftrekken en aantal gevonden juiste antwoorden per combinatie

Opgaven	Optellen tot		Aftrekken		Totaal splitsen	
	Frequentie	Aantal goed	Frequentie	Aantal goed	Frequentie	Aantal goed
Aanvullen						
1	6	3	2	2	8	5
5	4	4	5	5	9	9
11	0	n.v.t.	0	n.v.t.	0	n.v.t.
Verskil bepalen						
2	1	0	6	0	7	0
6	0	n.v.t.	0	n.v.t.	0	n.v.t.
Part bepalen						
3	0	n.v.t.	0	n.v.t.	0	n.v.t.
9	0	n.v.t.	0	n.v.t.	0	n.v.t.
Afhalen						
4*	0	n.v.t.	5	1	5	1
Totaal	11	7	18	8	29	15
% goed		64%		44%		51%
(*) Kale aftrekking						

De belangrijkste aanwijzing die de prestaties geven is dat het percentage correcte antwoorden de adequaatheid van splitsen in combinatie met de gekozen strategie weerspiegelt. *Optellen tot* en *afrekken* leiden beide tot een juiste uitkomst, als de tientallen en eenheden gemakkelijk kunnen worden ‘aangevuld’ of ‘afgehaald’ (opgave 1 en 5):

Opgave 1

$12 + ? = 25$ via $10 + 10 = 20$; $2 + 3 = 5$; $10 + 3 = 5$

óf

$25 + ? = 36$ via $20 + 10$; $5 + 1$; $10 + 1 = 11$

Opgave 5

$25 - 12$ via $20 - 10 = 10$; $5 - 2 = 3$; $10 + 3 = 13$

óf

$36 - 25$ via $30 - 20 = 10$; $6 - 5 = 1$; $10 + 1 = 11$

Beide strategieën leiden tot fouten, als de leerling eenheden tekort komt bij aftrekken of als hij over een tiental moet aanvullen (opgave 2 en 4)

Opgave 2

$22 - 18$ via $20 - 10 = 10$; $2 - 8?$

samen 35

$18 + ? = 22$ via $1 + 1 = 2?$

Opgave 4

$60 - 35$ via $60 - 30 = 30$; $0 - 5$ wordt $5 - 0$;

Groep Midden

De analyse van kaal aftrekken heeft uitgewezen dat leerlingen uit de middengroep opgave 12 ($62 - 48$) eerder splitsend en opgave 10 ($100 - 86$) eerder rijgend uitrekenen, maar dat ze beide opgaven in de regel *aftrekkend* uitrekenen. Kale aftrekopgaven lokken ook in deze groep, *aftrekken* uit (hoofdstuk 6).

Figuur 10.3 Gebruik van splitsen in de groep Midden, in combinatie met optellen tot en aftrekken en aantal gevonden juiste antwoorden per combinatie

Opgaven	Optellen tot		Aftrekken		Totaal splitsen	
	Frequentie	Aantal goed	Frequentie	Aantal goed	Frequentie	Aantal goed
Aanvullen						
1	6	5	2	2	8	7
8	1	0	7	3	8	3
11	0	n.v.t.	1	1	1	1
Verschil bepalen						
6	1	1	1	0	2	1
13	0	n.v.t.	7	1	7	1
Part bepalen						
3	0	n.v.t.	0	n.v.t.	0	n.v.t.
9	0	n.v.t.	2	1	2	1
Afhalen						
10*	1	1	5	1	6	2
12*	2	0	50	23	52	23
Totaal	11	7	18	8	29	15
% goed		64%		44%		51%
(*) Kale aftrekking						

De belangrijkste aanwijzing is dat de misconceptie van het aftrekschema leerlingen ertoe beweegt splitsend af te trekken terwijl ze deze handelingen niet inzichtelijk kunnen uitvoeren. Ze kiezen voor splitsen op basis van een misconceptie en maken als gevolg daarvan fouten, als ze eenheden tekort komen.

Dit komt tot uitdrukking in de oplossingen van opgaven 8, 10 en 13:

- In 3 van de 7 oplossingen van opgave 8 geeft de leerling 22 als uitkomst van $50 - 32$, omdat hij de eenheden verwisselt:
Opgave 8: $50 - 32$ via
 $50 - 30 = 20$; $0 - 2$ wordt $2 - 0 = 2$; samen 22
- Een vergelijkbare combinatie van getallen lokt op een vergelijkbare manier aftrekken en de omkeringsfout uit bij opgave 10:

Opgave 10: $100 - 86$ via

$100 - 80 = 20$; $0 - 6$ wordt $6 - 0 = 6$; samen 86

- In 6 van de 7 aftrekoplossingen van opgave 13 verwisselt de leerling de eenheden én tienvouden:

Opgave 13: $250 - 185$ via

$200 - 100 = 100$; $50 - 80$ wordt $80 - 50 = 30$; $0 - 9$ wordt $9 - 0 = 9$; $100 + 30 + 9 = 139$

De mate van succes weerspiegelt ook in die groep de mate van adequaatheid van splitsen in combinatie met *optellen tot* en *afrekken tot*. Over het geheel genomen zijn de prestaties in de middengroep te vergelijken met die van de leerlingen uit de groep Laag. Zes van de tien aanvulberekningen leiden tot een juiste uitkomst. Het omgekeerde geldt voor de aftrekberекningen.

Groep Hoog

De analyse van kaal aftrekken heeft uitgewezen dat leerlingen uit de groep Hoog opgave 12 ($62 - 48$) eerder rijgend dan splitsend oplossen (53% tegen 41%) en dat ze ook rijgend vaker tot de juiste uitkomst komen: 94% goed tegen 70% goed (zie hoofdstuk 6).

De belangrijkste aanwijzing is dat er in 64 van de 67 splitsoplossingen aftrekkend wordt gerekend. Dit suggereert dat leerlingen van dit vaardigheidsniveau zich minder door de context laten leiden.

Figuur 10.4 Gebruik van splitsen in de groep Hoog, in combinatie met optellen tot en aftrekken en aantal gevonden juiste antwoorden per combinatie

Opgaven	Optellen tot		Aftrekken		Totaal splitsen	
	Frequentie	Aantal goed	Frequentie	Aantal goed	Frequentie	Aantal goed
Aanvullen						
11	0	n.v.t.	0	n.v.t.	0	n.v.t.
17	1	0	0	n.v.t.	1	0
Verschil bepalen						
6	0	n.v.t.	1	1	1	1
13	1	0	4	1	5	1
Part bepalen						
9	0	n.v.t.	1	1	1	1
14	1	1	17	8	18	9
Afhalen						
12*	0	n.v.t.	37	26	37	26
16	0	n.v.t.	4	1	4	1
Totaal	3	1	64	38	67	39
% goed		33%		43%		58%

(*) Kale aftrekking.
In vet gedrukt (6): verwacht gebruik van optellen tot.

Opgave 14: 620 – 370 via
 $600 - 300 = 300$; $20 - 70$ wordt $70 - 20 = 50$; samen 350

Concluderend kan worden vastgesteld dat leerlingen uit de groep Laag en Midden strategisch splitsen, in die zin dat ze aftrekken of aanvullen afhankelijk van de context en de getallen. Deze flexibele houding speelt hen parten, omdat sommige getalcombinaties een eerder ingeslepen foutief splitschema aantrekken, wat stelselmatig tot een foutieve uitkomst leidt. Deze leerlingen maken de omkeringsfout die de ‘rekenzwakke’ leerlingen in de laatste twee decennia van de vorige eeuw maakten.

10.3 Splitsprocedures

Hoe vaak worden de twee geleerde splitsprocedures gebruikt?
Hoe presteren de leerlingen met de gebruikte splitsprocedures?

Splitsen komt voort uit tellen met groepen van tien en losse eenheden (Treffers en de Moor, 1991; Fuson, 1997). Structurerend tellen met 10 levert de tienvouden op ('10', '20', '30', etc.) die samen de grote telrij vormen (10, 20, 30, etc.):

- Zodra leerlingen hebben begrepen hoe ze tellen met ‘tien’ met het tellen met ‘één’ kunnen combineren, komt splitsend optellen en aftrekken in handbereik:

- Handelend met dozen en losse eieren, briefjes en euromunten ligt het voor de hand om, in de lijn van tellen, de twee 'tienen' en de 'enen' apart te behandelen (optellen of aftrekken) en de verkregen 'parten' te hergroeperen:

- 154 PPON

- $30 + 20$ via (30) 40, 50; 6 erbij 2 is 8. Dan is het $50 + 8 = 58$
- $20 - 10 = 10$, 4 eraf 3 is 3, 2, 1, samen 11.

Deze manier van optellen en aftrekken spreekt voor zich en wordt ook correct uitgevoerd, zolang het aantal eenheden en tientallen niet boven de 10 komt bij optellen, en zolang er genoeg eenheden zijn om weg te kunnen halen wat je weg moet halen, bijvoorbeeld:

25 – 12 bij opgave 1 en 36 – 25 bij opgave 8
 maar problematisch wordt het bij:
 40 – 24 bij opgave 6 of 62 – 48 bij opgave 12

De Leidse onderzoeksgroep heeft twee splitsprocedures geïdentificeerd die in dit onderzoek als splitscategorieën worden gebruikt en die met de roepnaam '1010' en 'e1010' worden aangeduid:

- de 1010-procedure:
 - beide getallen in tienvouden en eenheden splitsen;
 - eerst de tienvouden en vervolgens de eenheden apart optellen of aftrekken;
 - beide uitkomsten tot één getal combineren.

Voorbeeld
 Juist splitsschema: $65 - 42$ via $60 - 40 = 20$; $5 - 2 = 3$; $20 + 3 = 23$
 Foutieve omkering: $62 - 48$ via $60 - 40 = 20$; $2 - 8$ wordt $8 - 2 = 6$; $20 + 6 = 26$
- de e1010-procedure:
 - beide getallen in tienvouden en eenheden splitsen;
 - eenheden en vervolgens de tienvouden apart optellen of aftrekken;
 - beide uitkomsten tot één getal combineren.

Voorbeeld:
 Juist splitsschema: $65 - 42$ via $5 - 2 = 3$; $60 - 40 = 20$; $20 + 3 = 23$
 Foutieve omkering: $62 - 48$ via $2 - 8$ wordt $8 - 2 = 6$; $60 - 40 = 20$; $20 + 6 = 26$

Dezelfde onderzoeksgroep heeft vastgesteld dat leerlingen er al in jaargroep 4 achter komen dat ze de zogenoemde combinatiemethode kunnen gebruiken als de som van de eenheden groter is dan 10 en als het aantal eenheden van de aftrekker kleiner is dan dat van de aftrektal (Beishuizen en van Mulken, 1991; Fuson e.a., 1997).

- $62 - 48$ via $60 - 40 = 20 \rightarrow 20 + 2 = 22 \rightarrow 22 - 8 = 14$
- $36 + 28$ via $30 + 20 = 50 \rightarrow 50 + 6 = 56 \rightarrow 56 + 8$ via $60 + 4 = 64$

Zoals eerder gezegd, wordt deze mengvorm in dit onderzoek niet als een derde vorm van splitsen beschouwd, maar als een tijdelijk rekenschema dat leerlingen in de loop van de formalisering van het splitsen ontwikkelen (zie hoofdstuk 1 en paragraaf 10.3 over de formalisering van splitsen).

Analyse

De gebruikte splitsprocedure is in elke splitsoplossing op basis van bovenstaande definiëring gecodeerd. De sortering van 189 gecodeerde oplossingen per procedure (eerst de tientallen # eerst de eenheden) en uitkomsten (goed # fout) leverde, per vaardigheidsgroep, onderstaande resultaten op.

Resultaten

De frequentietabellen van de figuren 10.5 tot en met 10.7 tonen aan dat de twee splitsprocedures per vaardigheidsgroep verschillend worden gebruikt. Het onderliggende patroon wordt hieronder, per vaardigheidsgroep, met geobserveerde splitsberekeningen geïllustreerd. Deze voorbeelden geven een impressie van de wijze waarop leerlingen, halverwege de basisschool met de 1010-procedure of de e1010-procedure aanvullend optellen en aftrekken.

Groep Laag

De resultaten van de groep Laag zijn weergegeven in tabel 10.5. De bijbehorende staafgrafiek visualiseert de invloed van opgavenkenmerken:

- Leerlingen uit de groep Laag gebruiken vooral de 1010-procedure, het vaakst bij de oplossing van opgave 1 ($25 - 12$) en 5 ($36 - 25$).

De getallen van opgave 2 (misconceptie) en 5 sporen de leerlingen het meest aan om eerst de eenheden te bewerken (de e1010-procedure):

$22 - 18$ via $8 - 2 = 6$; $2 - 1 = 1$; samen 12

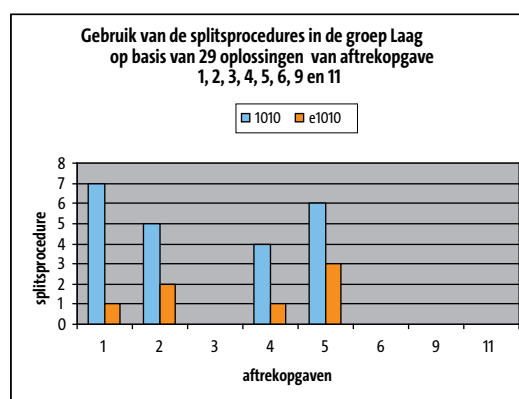
$36 - 25$ via $6 - 5 = 1$; $30 - 20 = 10$; $10 + 1 = 11$

- Met beide procedures wordt ongeveer één op de twee gemaakte opgaven correct opgelost.

Figuur 10.5 Gebruiksfrequentie van de twee splitsprocedures frequentie en bijbehorende prestaties in de groep Laag

Opgaven	Eerst de tienvouden (1010)	Eerst de eenheden E1010	Totaal goed
	Aantal goed	Aantal goed	
1	5 op 7	0 op 1	5 op 8
2	0 op 5	0 op 2	0 op 7
3	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
4*	6 op 6	1 op 1	1 op 5
5	6	3 op 3	9 op 9
6	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
9	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
11	n.v.t.	n.v.t.	n.v.t.
Totaal	11 op 22	4 op 7	15 op 29
% goed	50%	57%	52%

(*) Kale aftrekking



Geobserveerde splitsoplossingen van leerlingen uit de groep Laag

• Eerst de eenheden bewerken (e1010)

Opgave 1 (leerling 37) aanvullend, foutief

$12 + \dots = 25$ via $12 + 13 = 25$; schrijft 25 in het hokje. Want $2 + 3 = 5$; $10 + 10$ erbij is al 20 dus $5 + 20 = 25$

Opgave 2 (leerling 127) aftrekkend, foutief

$18 - 22$ via 0 eraf (wegdenken). Dan de getallen uitrekenen: $8 - 2 = 6$. Het antwoord is 16.

Opgave 4 (leerling 31) aftrekkend, correct

Cijferen uit het hoofd;

60

35 –

0 – 5 kan niet; een van de 6 lenen. $10 - 5 = 5$; $5 - 3 = 2$ dus 25

Opgave 5 (leerling 275): aanvullend, correct

$$36 - 25 =$$

Vult splitsend aan: 5 bij 1 om 6 te krijgen en 10 bij 20 om 30 te krijgen

1 erbij 5 is 6; $20 + 10 = 30$; $1 + 5 = 6$, dus 36, 11 dus

• Eerst de tienvouden bewerken (1010)

Opgave 4 (leerling 262): aanvullend, correct (combinatie splitsen-rijgen)

$12 + ? = 25$ via $10 + 10 = 20$; $20 + 2 = 22$ (de 2 van 12); $22 + 3 = 25$ (om aan te vullen tot 5); $10 + 3 = 23$

Opgave 4 (leerling 276): aftrekkend, foutief

$60 - 35$ via $6 - 3 = 3$; $5 - 0 = 5$; samen 35. In boekje opgeschreven: $6 - 3 = 3$; $5 - 0 = 5$

Opgave 5 (leerling 109): aanvullend, correct ($36 - ? = 25$ via $3 - 2 = 1$ (tientallen) en $6 - 5 = 1$)

Eerst: 1 van de 3 eraf doen om 2 te krijgen; om 6 te maken moet er ook eentje af, dus 11 is het antwoord.

Opgave 5 (leerling 140): aftrekkend, correct

$36 - 25$: $30 - 20$ dat is 10 en dan doe je $6 - 5 = 1$, dat is elf

Opgave 5 (leerling 67): aanvullend, correct ($25 + ? = 30$ via $20 + 10 = 30$ en $5 + 1 = 6$, dus samen 11)

11; $20 + 10 = 30$; 5 en net zo lang doorgeteld tot ik 6 kreeg. Ik had er 1 bijgedaan in mijn hoofd.

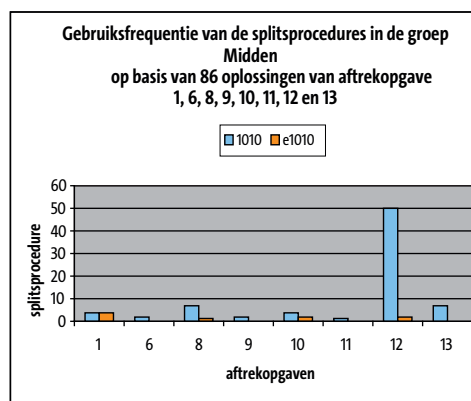
Groep Midden

De resultaten zijn weergegeven in figuur 10.6. De bijbehorende staafgrafiek visualiseert de invloed van opgavenkenmerken.

Figuur 10.6 Gebruiksfrequentie van de twee splitsfrequentie en bijbehorende prestaties in de groep Midden

Opgaven	Eerst de tienvouden (1010)	Eerst de eenheden E1010	Totaal goed
	Aantal goed	Aantal goed	
1	4 op 4	3 op 4	7 op 8
6	1 op 2	n.v.t.	1 op 2
7	3 op 7	0 op 1	3 op 8
9	1 op 2	n.v.t.	1 op 2
10*	1 op 4	1 op 2	2 op 6
11	1 op 1	n.v.t.	1 op 1
12*	23 op 50	0 op 2	23 op 52
13	1 op 7	n.v.t.	1 op 7
Totaal	35 op 77	4 op 9	39 op 86
% goed	45%	44%	45%

(*) Kale aftrekking



De resultaten tonen het volgende aan:

- Ook leerlingen uit de groep Midden gebruiken vooral de 1010 procedure, het vaakst bij opgave 12 (50 keer).

- Ze bewerken slechts in een kleine 10% van de gevallen eerst de eenheden en pas daarna de tienvouden. Deze procedure passen ze toe bij opgave 1, net zoals leerlingen uit de groep Laag dat doen. Ook gebruiken ze de procedure bij opgave 8 en 10 en bij opgave 12, net als leerlingen in de groep Hoog. De procedure wordt het vaakst gebruikt bij het oplossen van opgave 1.
- Met beide procedures wordt bijna één op de twee gemaakte opgaven correct opgelost.

Geobserveerde splitsoplossingen van leerlingen uit de groep Midden

• Eerst de eenheden bewerken (e1010)

Opgave 1 (leerling 179): aftrekkend, correct

25 – 12 via $5 - 2 = 3$ en $20 - 10 = 10$; antwoord 13: $25 - 12 = 13$

Opgave 8 (leerling 217): aftrekkend, foutief

De leerling zegt: $50 - 32 = 20$ (bedoelt $50 - 30 = 20$); $0 + 2$; $20 + 2 = 22$; 22 krijgt hij terug.

Gevraagd wordt de som nog eens te herhalen. Leerling zegt: $50 - 32 = 20$; $0 - 2 = 2$; het antwoord is dan 22. In boekje opgeschreven: $50 - 32 = 20 + 2 = 22$ (omkeringsfout $0 - 2 = 2$ en $50 - 30 = 20$, samen 22)

Opgave 10 (leerling 119): aanvullend, correct

(waarschijnlijk: $86 + ? = 100$ via $86 + 4$, erbij 10 is 100)

De leerling zegt: $6 + 4 = 10$; de 10 bij de 8 (80) optellen is 100

Opgave 10 (leerling 53): aftrekkend, foutief

$100 - 86$ via $10 - 6 = 4$, dat is het kleinste getal (bedoelt 10 eenheden van 100 eraf 6 eenheden van 86)

$10 - 8 = 2$ (bedoelt de 10 T van 100 en de 8 T van 80), zodat het een heel stuk makkelijker wordt. Dan hou je 24 over (de leerling vergeet dat 10 geleend is!).

Opgave 12 (leerling 128): aftrekkend, foutief

(Mislukte bandopname)

$62 - 48$ via eerst $8 - 2$, nee $12 - 8 = 4$ (De leerling leent dus 10); $40 - 60 = 20$ ($60 - 40 = 20$), bij elkaar 24.

Soms doe ik het met streepjes kijk zo: hij geeft juf uitleg hoe je zo'n type som ook kan uitrekenen.

• Eerst de tienvouden bewerken (1010)

Opgave 10 (leerling 83): aftrekkend, foutief

$100 - 86$ via $100 - 80 = 20$, nog niet invullen. $0 - 6 = 6$; $20 + 6 = 26$

Opgave 10 (leerling 189): aftrekken, onjuiste bewerking van de eenheden

26! $10 - 8 = 2$, ik maak er 20 van; 6 erbij is 26

Opgave 10 (leerling 225): aftrekkend, correct

$100 - 96$ via 8 van de 10 is 2 ($100 - 80 = 20$), is al 20; dan 6 van de 10 is 4. Het is dus 14: $100 - 10 = 14$

(informele vorm van lenen)

Opgave 8 (leerling 59): aftrekkend, foutief

$32 - 50$ via 30 van de 50 af is 20; $2 - 0 = 2$. Dan hou je 20 over en 2 erbij maakt 22.

Opgave 8 (leerling 225): aftrekkend, correct

Schrijft $50 - 32$ en zegt $50 - 30 = 20$; $10 - 2 = 8$; antwoord 18

(informele vorm van lenen)

Opgave 8 (leerling 18): aftrekkend, correct

$50 - 32 = 18$ 'tussen streepjes' in boekje opgeschreven:

H | T | E

0 | 20 | - 2 $50 - 30 = 20$ en nog min 2

0 | 10 | 8

Opgave 12 (leerling 159): aftrekkend, foutief

$40 - 60 = 20$ dan $8 - 2 = 6$; $6 - 10 = 4$ 30 $20 + 6 + 4 = 30$

In boekje opgeschreven: $40 - 60 = 20$; $8 - 2 = 6$; $6 - 10 = 4$; $62 - 48 = 30$; $20 + 6 + 4 = 30$

Opgave 12 (leerling 191): aftrekkend, correct, m.b.v. de combinatie splitsen-rijgen

Moeilijke som! 14! $60 - 40 = 20$, dan $20 + 2 = 22$, dan $22 - 2 = 20$, van de 8. Dan $20 - 6 = 14$

In boekje opgeschreven: $60 - 40 = 20$; $20 + 2 = 22$; $22 - 2 = 20$; $20 - 6 = 14$

Opgave 12 (leerling 207): aftrekkend, correct, met tekorten

$60 - 40 = 20$; 8! Nee! $2 - 8 = 6$; 6 van de 20 is 14

Opgave 12 (leerling 2): aftrekkend, correct, via een informele vorm van lenen

$62 - 48$ via 40 af die 60 is 20; 8 af die 2, kan niet. Moet je niet 20 maar 10. 10 (van die 20) en 2 erbij is 12, eraf 8 is 4, dus 14.

Groep Hoog

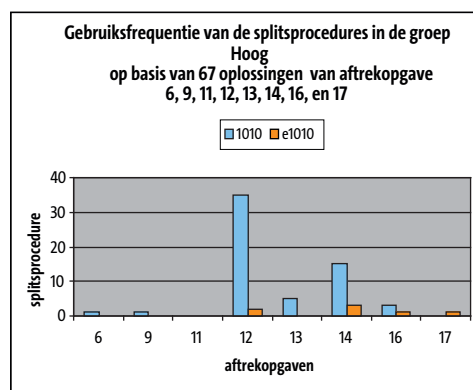
In figuur 10.7 zijn de resultaten van de groep Hoog weergegeven. Die laten de volgende drie zaken zien:

- Leerlingen uit de groep Hoog bewerken, net zoals de leerlingen uit de middengroep slechts in één op de negen opgaven eerst de eenheden. Deze procedure is drie keer toegepast bij opgave 14 en twee keer bij de kale aftrekking $62 - 48$ van opgave 12.
- De 1010-procedure wordt juist het vaakst bij opgave 12 toegepast (35 keer) en ook vaak bij opgave 14 (15 keer).
- Met de 1010-procedure bereiken de leerlingen, over het geheel genomen, het hoogste gemiddelde succes (van ruim 60%). Met de e1010-procedure wordt echter zeer slecht gepresteerd: krap 30% goed.

Figuur 10.7 Gebruiksfrequentie van de twee splitsfrequentie en bijbehorende prestaties in de groep Hoog

Opgaven	Eerst de tienvouden (1010)	Eerst de eenheden E1010	Totaal goed
	Aantal goed	Aantal goed	
6	1 op 1	n.v.t.	7 op 8
9	1 op 1	n.v.t.	1 op 2
11	n.v.t.	n.v.t.	3 op 8
12	25 op 35	1 op 2	1 op 2
13	1 op 5	n.v.t.	2 op 6
14	8 op 15	1 op 3	1 op 1
16	1 op 3	0 op 1	23 op 52
17	n.v.t.	0 op 1	1 op 7
Totaal	37 op 60	2 op 7	39 op 67
% goed	62%	29%	58%

(*) Kale aftrekking



Geobserveerde splitsoplossingen van leerlingen uit de groep Hoog

- **Eerst de eenheden bewerken (e1010)**

Opgave 12 (leerling 123): aftrekkend, correct, met tekorten

$60 - 40 = 20$; $2 - 8$ is 6 tekort; $20 - 6 = 14$

Opgave 14 (leerling 24): aftrekkend, correct, met tekorten

$62 - 48$ via 2 van de 8 af. 60, eraf 40 is 20; 6 eraf is 14

Opgave 14 (leerling 216): aftrekkend, correct, kolomsgewijs aanvullend

$620 - 370$, via $370 + \dots = 620$

$0 + 0 = 0$; $7 + 5 = 12$; $1 + 3 = 4$; $4 + 2 = 6$; $370 + 50 = 620$; $370 + 250 = 620$

In boekje: kolomsgewijs aanvullen

370 370 370

___ + $\rightarrow$ 50 $\rightarrow$ 250

620 620 620

- **Eerst de tienvouden bewerken (1010)**

Opgave 12 (leerling 69): aftrekkend, correct, met tekorten

$60 - 40 = 20$; $8 - 2$ gaat niet; 6 van de 20 eraf is 14

Opgave 12 (leerling 81): aftrekkend, foutieve omkering

$60 - 40 = 20$; $8 - 2 = 6$; $20 + 6 = 26$

Opgave 14 (leerling 84): aftrekkend, correct, met tekorten

$620 - 370$ via (1) $600 - 300 = 300$; (2) $70 - 20 = 50$; (3) $300 - 50 = 250$

Opgave 14 (leerling 99): aftrekkend, foutief

$620 - 370$ via $600 - 300 = 300$; $70 - 20 = 50$; samen 350

Opgave 14 (leerling 198): komt er niet uit.

$620 - 370$ via $600 - 300$; $20 - 70 = 0$; $0 - 0 = 0$; 300?

Conclusie

We kunnen concluderend vaststellen dat leerlingen halverwege jaargroep 5 in de regel de 1010-procedure toepassen. Absoluut gezien, bewerken leerlingen uit de groep Laag vaker eerst de eenheden dan leerlingen uit de groep Midden. Dit wordt waarschijnlijk door de getalkenmerken veroorzaakt. Ze maken minder opgaven waarbij het er, door inwisselhandelingen, toedoet of je eerst de tienvouden of eerst de eenheden bewerkt.

Bij opgave 12 doet het er wél toe:

$62 - 48$ via $(60 - 40) - 6$ versus $2 - 8$, 6 tekort, dan $60 - 40 = 24$ en dan $20 - 6 = 14$.

Bij opgave 5 doet het er niet toe:

$36 - 25$ via $(30 - 20) + (6 - 5)$ versus $(6 - 5) + (30 - 20)$.

Dit zou tevens de variatie in de mate van succes kunnen verklaren. De groep Laag maakt immers twee opgaven waarin het er niet toedoet (opgave 1 en 5), terwijl leerlingen uit de overige groepen alleen opgaven maken waar het er wél toedoet.

We hebben daarom de analyse-methode die in hoofdstuk 7 is gepresenteerd ook toegepast voor de beschrijving van de formalisering van splitsen op basis van de geobserveerde splitsingen. We lichten deze analyse-methode kort toe, alvorens het proces en de geconstrueerde sequentie te presenteren.

Analyse

We doen bij deze analyse twee aannames:

- 1 dat het geobserveerde scala van splitsoplossingen de differentie weerspiegelt die ontstaat als leerlingen splitsend leren aftrekken;
- 2 dat deze vormen van splitsen verschillende niveaus van splitsend aftrekken zichtbaar maken. De ordening van de geïdentificeerde vormen van splitsen langs deze niveaus markeren dan de weg die basisschoolleerlingen volgen om de meest informele vorm van splitsend aftrekken tot de meest compacte en abstracte vorm van splitsen te transformeren: schriftelijk algoritmisch aftrekken.

Vanuit deze aannames is de sequentie van de formalisering in vier fasen geconstrueerd:

- (1) Eerst zijn alle verschillende splitsoplossingen per opgave geïnventariseerd om een overzicht te krijgen van het repertoire aan splitsprocedures.
- (2) Uit deze verzameling zijn vervolgens splitsoplossingen geselecteerd die zichtbaar maken hoe leerlingen 'decimaal' aftrekken en op welke concepties, rekenfeiten en vaardigheden deze splitshandelingen zijn gebaseerd (niveaus van splitsen).
- (3) Daarna zijn de onderscheiden vormen van splitsen hiërarchisch met elkaar in verband gebracht door te expliciteren welke leerervaring de leerling in staat stelt om een lagere vorm van splitsen tot die van het eerst volgende niveau te transformeren (condities voor niveauverhoging).
- (4) Ten slotte is de geconstrueerde splitssequentie geïntegreerd met de formalisering van het rijgen (zie hoofdstuk 8) op grond van theoretische én geobserveerde dwarsverbindingen.

Niveaus van splitsen

In het hele bestand van 182 aftrekberendingen zijn vijf niveaus van splitsen geïdentificeerd die zichtbaar maken hoe leerlingen 'decimaal' aftrekken en welke elementen ze hiervoor gebruiken (zie figuur 10.9 op pagina 160):

- 1 lineair-decimaal splitsen met 'tienen' en 'enen';
- 2 lineair-decimaal splitsen, aftrekken in combinatie met rijgen;
- 3 structurerend, aftrekken met tekorten;
- 4 semipositieel, kolomsgewijs aftrekken (onder elkaar) en via achteraf lenen;
- 5 positieel, algoritmisch aftrekken.

Deze niveaus worden tijdelijk met een letter aangeduid, omdat ze in de laatste fase van de beschrijving met de niveaus van rijgen worden geïntegreerd. We presenteren deze vijf niveaus achter elkaar aan de hand van geobserveerde voorbeeldoplossingen.

1 Lineair-decimaal splitsen

Twee vormen van lineair-decimaal splitsen zijn geobserveerd: aftrekken met eenheden van tien en één en aftrekken met de mengvorm splitsen-rijgen.

Niveau 1: aftrekken met groepen van 10 en losse eenheden

Onderstaande oplossingen laten de meest informele vormen van splitsen zien. In alle gevallen rekent de leerling met groepen van tien ('tienen') en losse eenheden ('enen').

Geobserveerde voorbeelden van splitsen met groepen van 10 en losse eenheden

Aanvullend optellen

Opgave 5: $25 + ? = 36$

- Laag: $20 + 10 = 30$; 5 en net zo lang doorgeteld tot ik 6 kreeg. Wat was zijn antwoord?
- Laag: 20 moet 30 worden is 10; erbij $5 - 2 = 3$, dan is het $10 + 3 = 13$

Aftrekken

Opgave 1: $25 - 12 = ?$

- Laag: de leerling schrijft heel snel 13 op. $10 + 20$ nee, zelfde als de vorige, $2 + 3$, $5 - 2$. Is 13! Eerst de tien, dan de lossen. Gewoon $20 - 10 = 10$, $5 - 2 = 3$. Uitkomst is 13. Ik kan al weten dat het een erafsom is. Doe ik gewoon $25 - 12$, dan weet ik dat meteen.
- Laag: 12 van de 25 eraf is ... eerst 10 van de 20 is 10, ... twee...nee! 2 van de 5 is 3, dan heb je 13.

Leerlingen kunnen op deze manier optellen en aftrekken, zodra ze voldoende kennis van tellen met eenheden van 'tien' en 'een' hebben verworven om deze handelingen routinematig uit te voeren. Zolang leerlingen nog niet hebben ontdekt dat 30 evenveel is als drie keer tien (c.q. 50 evenveel is als vijf keer tien en 80 evenveel als acht keer tien), springen ze met de 10-sprong in de telrij en houden het aantal sprongen van tien met hun vingers bij (dubbel tellen met tienvouden). Optellen en aftrekken met tien en eenheden verloopt in die zin 'lineair'. We associëren om die reden dit startniveau van splitsen met rijgniveau 4, waarop de leerling met de 10-sprong rijgt, nadat hij naar het dichtstbijzijnde tienvoud is gesprongen (zie Integratie hieronder).

$36 - 25$ via (1) 30 eraf 20 is (30), 20, 10; 6 eraf 5 is (6), 5, 4, 3, 2, 1; 10 erbij 1 is 11

Niveau 2: aftrekken met de mengvorm splitsen-rijgen

De tweede geïdentificeerde vorm van lineair-decimaal splitsen is de combinatie van splitsen met rijgen. Dit rekenschema kan worden beschouwd als de oplossing die de leerling bedenkt om de eenheden te bewerken, als hij meer 'lossen' eraf moet halen dan het aantal lossen dat hij heeft. Maar de eenheden gooien roet in het eten. Op grond van zijn ervaring met optellen, vindt de leerling het namelijk vanzelfsprekend om de eenheden van het ene getal met die van het andere te verwisselen. Optellen is 'commutatief' (verwisseleigenschap), maar aftrekken niet. Dat weet de leraar, maar de leerling die deze misconceptie voor het eerst begaat niet. Van leerlingen uit jaargroep 5 mogen we echter verwachten dat ze, net als Natascha in het onderstaande voorbeeld, 'inmiddels' hebben begrepen waarom ze de lossen niet 'mogen' verwisselen:

Natascha bij $62 - 48$:

$60 - 40 = 20$, nog niet invullen! Vroeger ruilde ik het om: $8 - 2$. Maar nu weet ik dat dat niet goed is. Van de 20 maak ik 10, dan doe ik er 2 bij dus 12, dan doe ik er 8 af, dus 14.

Voorbeelden van verwisseling van de eenheden medio jaargroep 5

Opgave 2: $22 - 18$

$22 - 18$ via $2 - 1 = 1$, $8 - 2 = 6$, dus 16

Opgave 4: $60 - 35$

$6 - 3 = 3$, $0 - 5 = 5$, $3 + 5 = 53$... Wacht! ... Ja! 35.

Opgave 10: $100 - 86$

$100 - 80 = 20$, nog niet invullen! $0 - 6 = 6$; $20 + 6 = 26$

Opgave 12: $62 - 48$

$60 - 40 = 20$; $8 - 2 = 6$; 26 of $60 - 40 = 20$; $2 - 8$ is 16

Een groot aantal splitsoplossingen geeft aan dat leerlingen uit jaargroep 5 dit tekort aan eenheden (tijdelijk) met de mengvorm ‘splitsen-rijen’ oplossen.

Voorbeelden van splitsen met de mengvorm splitsen-rijen

Opgave 12 (leerling 191, Midden)

Moeilijke som! 15! $60 - 40 = 20$, dan $20 + 2 = 22$ dan $22 - 2 = 20$, van de 8. Dan $20 - 6 = 14$

In boekje opgescheven: $60 - 40 = 20$; $20 + 2 = 22$; $22 - 2 = 20$; $20 - 6 = 14$

Opgave 12 (leerling 126, Hoog)

Ik doe de 2 weglaten: $60 - 40 = 20$. Ik doe de 2 erbij in 22: $20 + 2 = 22$. Dan doe ik $22 - 8 = 14$

Opgave 12 (leerling 117, Hoog): foutief

In een keer uit het hoofd: $60 - 40 = 20$, erbij 2 is 22, eraf 8 is 16

Opgave 12 (leerling 156, Hoog): foutief (2 van 62 vergeten)

Eerst 40 eraf is 20 ($60 - 40 = 20$), dan nog dan nog 8 van de 20 af is 12

3 Structurerend aftrekken

Het hierna volgende niveau van splitsen kwam pregnant naar voren bij de analyse van de oplossingen van opgave 12 ($62 - 48$).

Niveau 3: aftrekken met tekorten

De betreffende leerlingen uit de groepen Midden en Hoog rekenen nu met tienvouden, en gebruik hiervoor bekende geheugenfeiten als $50 - 20 = 30$, $60 - 30 = 30$ en $100 - 80 = 20$. Daarom correspondeert dit niveau van splitsen met het niveau waarop leerlingen structurerend rijen: niveau 6 van de rijsequentie van hoofdstuk 7.

Voorbeelden van structurerend splitsen met tekorten

Opgave 12 (leerling 123, Hoog)

$60 - 40 = 20$; $8 - 2 = 6$; $20 - 6 = 14$

Opgave 12 (leerling 207, Midden)

$60 - 40 = 20$; 8! Nee! $2 - 8 = 6$; 6 van de 20 is 14

Het verschil met de mengvorm is dat rijgen wordt losgelaten. Leerlingen nemen op dit niveau het ervaren tekort aan eenheden voor wat het is, een 'tekort': $2 - 8$ wordt 'gewoon' -6 , opgevat als 6 tekort, dat van de 20 (van $60 - 40$) af gaat.

Als leerlingen dit niveau hebben bereikt, is het rijgen definitief buiten beeld. Ze kunnen dan de tekorten nader onderzoeken om het onderliggende probleem efficiënter op te lossen.

4 Kolomsgewijs aftrekken

Het – hoofdrekenend – onder elkaar aftrekken dat 'kolomsgewijs' aftrekken wordt genoemd, is in slechts 9 van de 182 geobserveerde splitsoplossingen toegepast. Dat is krap 5% van het totaal. Dit toont aan dat positioneel aftrekken niet in de middenbouw wordt behandeld, maar pas vanaf jaargroep 6.

Op dit niveau 4a zijn twee vormen van kolomsgewijs aftrekken geïdentificeerd: onder elkaar tussen positiestrepen aftrekken en achteraf lenen.

Niveau 4a: onder elkaar tussen positiestrepen aftrekken

In onderstaande voorbeelden rekenen de leerlingen 'tussen streepjes', zoals ze dat zelf verwoorden. Dit splitschema lijkt nog erg veel op het in sommentaal – achter elkaar – aftrekken met tekorten. De leerling rekt nog steeds van 'links' (tienvouden) naar 'rechts' (eenheden) met 'hele' getallen (positiewaarden), en redeneert nog steeds in termen van tekorten. De splitshandelingen zijn echter 'gestandaardiseerd' in die zin dat de getallen nu onder elkaar, tussen positiestrepen worden opgeschreven. De oplossing van leerling 11 toont aan dat dit schema ook wordt gebruikt om aanvullend optellend af te trekken.

Voorbeelden van onder elkaar tussen positiestrepen aftrekken

Opgave 8 (leerling 226, Hoog)

$24 - 40$, tussen streepjes:

| 0 | - 20 | 4 | $20 - 40$ is -20 en nog 4

Kom je uit op € 4, als ik het goed uitreken, nee! Je komt uit op 16. $40 - 20 = 20$ en 4 eraf

Opgave 8 (leerling 179, Midden)

We rekenen altijd tussen streepjes! Opgeschreven in het boekje:

$50 - 32 =$

| H | T | E |

| 0 | 20 | - 2 | $50 - 30 = 20$ en nog min 2

| 0 | 10 | 8 | 10 gebruiken om 2 eraf te halen, 8 over

$10 + 8 = 18$

Opgave 8 (leerling 11, Midden)

Schrijft een stipsom onder elkaar

32

$\underline{\quad} + 28$

50

(de leerling probeert in twee stappen onderstaande handelingen aan te vullen).

$5 - 2 = 3$ dus 20 (wat moet er van 5 af om 3 te krijgen?)

$40 - 8 = 32$ (Hoeveel moet er van 40 af om 32 te krijgen?)

Antwoord 28 (de leerling vergeet dat een tiental is gemaakt, waardoor je 10 in plaats van 20 bij 8 moet doen)

Opgave 9 (leerling 179, Midden)

In boekje opgeschreven: $100 - 48$

$| 0 | 60 | - 8 | 100 - 40 = 60$ en nog $- 8$

$| 0 | 50 | 2 | 10$ gebruiken om 8 eraf te halen, 2 over $\rightarrow 50 + 2 = 52$

Aftrekken tot 1.000

Opgave 9 (leerling 226, Hoog)

$900 - 595$ via $900 - 500 = 400 \rightarrow 90 \rightarrow 5$

Tussen streepjes genoteerd: $| 400 | 90 | 5 |$ is 495

Dit had moeten zijn: $/ 400 / - 90 / - 5 /$ is $400 - 95 = 305$

Niveau 4b: achteraf lenen

Op afstand bekeken, vormen drie unieke oplossingen die 'uit het hoofd' zijn uitgevoerd – en dus niet onder elkaar op papier zijn genoteerd – de springplank naar algoritmisch splitsen. Een daarvan is die van leerling 83 die treffend onder woorden brengt hoe zij op het punt staat afstand te nemen van hoofdrekennen. Zij bewerkt nog steeds eerst de tientallen, maar 'vult nog niet in', anticiperend op het gebruik van één van de 2 tientallen die overblijven om, in combinatie met de 2 eenheden van 62, de 8 van 48 te kunnen aftrekken. We noemen dit splitschema dan ook 'achteraf lenen'. Deze uitdrukking duidt de hoofdrekenvorm van 'lenen' aan (afsplitsing van 62 in $50 + 12$) én de koerswijziging in de richting van puur positioneel algoritmisch aftrekken.

Achteraf lenen

Opgave 12 (leerling 83, Midden)

$62 - 48 = 60 - 40 = 20$ nog niet invullen; $2 - 8$...kan niet?...Kan wel?...Vroeger ruilde ik het om $8 - 2$. Maar nu weet ik dat dat niet goed is. Van de 20 maak ik 10. Dan doe ik er 2 bij dus 12. Dan doe ik er 8 af dus 14.

Opgave 12 (leerling 2, Midden)

40 af die 60 is 20. 8 af die 2, kan niet. Moet je niet 20 maar 10. 10 af die 20 en 2 eraf 8, 14!

Opgave 12 (leerling 131, Midden): foutief

$60 - 40 = 20$; $20 - 10 = 10$. Het antwoord is 10. (De twee laatste stappen ontbreken: $12 - 8 = 4$ en $10 + 4 = 14$)

5 Positioneel aftrekken

In totaal zijn zeven oplossingen waargenomen waarin de leerling met positiecijfers en niet meer met positiewaarden aftrekt, op een manier die sterk overeenkomt met het traditionele cijfer-algoritme. We beschouwen dit type handeling als het eindniveau van splitsend aftrekken.

Niveau 5: algoritmisch aftrekken

Leerlingen die de sprong naar dit niveau maken, transformeren de standaard splitsprocedures van het kolomsgewijs aftrekken tot een aftrekalgoritme. Ze rekenen dan niet meer met positiewaarden van links naar rechts (van de honderdvouden naar de tienvouden en de eenheden), maar met positiecijfers van rechts naar links (van de eenheden naar de tientallen naar de honderdtallen). Ze passen telkens weer dezelfde 'cijferhandelingen' toe, gebruikmakend van dezelfde geheugenfeiten van het getalgebied tot 20.

Algoritmisch splitsen

Opgave 4 (leerling 31, Laag) 60
Hoofdcijferen. 0 – 5 kan niet; een van de 6 lenen, 35 –
10 – 5 = 5; 5 – 3 = 2, dus 25 25

Opgave 16 (leerling 12, Hoog)
900 – 595 = ? via: eerst trek ik 5 eraf, dan 1 bij de 10 weg, dan 400 eraf. Antwoord: 415

Opgave 17 (leerling 12, Hoog)
998 + ... is 16 duizend 62. Leerling denkt lang na en schrijft: 174
Ze maakt van de 1 een 6 (164) 11
8 + 4 is 12, haal je 10 eraf, is 2 998
7 + 9 is 16, haal je 10 vanaf, is 6 74 +
doe je 10 erbij, is 7 1.662
dan de volgende 9 + 6 = 15
doe je 10 erbij is 16

Niveauperhogingen

We gaan ervan uit dat leerlingen hun hoofdrekenprocedures volgens deze systematiek formaliseren: cyclisch, door telkens de laatst ontwikkelde vorm van rekenen verder te perfectioneren, gebruikmakend van formelere eigenschappen van en relaties tussen getallen en operaties. Elke niveauperhoging wordt mogelijk gemaakt door inzichten en vaardigheden die de leerling in de overgangsfase verwerft.

Uitgaande van bovenstaande rekenschema's kan de formalisering van splitsen in vijf fasen worden gemodelleerd, zoals geschetst in figuur 10.9. De leerling transformeert dan *af trekken met groepen van tien en losse eenheden* tot *algoritmisch af trekken* in vier op elkaar aansluitende niveauperhogingen.

- Op het startniveau van splitsen rekent de leerling met groepen van tien en losse eenheden precies zoals hij hoeveelheden objecten samenstelt (optellen) en afsplitst (af trekken).
- Bij de overgang van niveau 1 naar niveau 2 ontdekt de leerling de handigheid van de tussenstap die het mogelijk maakt om het tekort aan eenheden op te lossen.
- Bij de overgang van niveau 3 naar niveau 4 brengt de positionele ordening van de eenheden en de tientallen de leerling op het idee om het aantal eenheden tegen elkaar af te wegen en al doende met tekorten af te trekken.
- Bij de overgang van niveau 4 naar niveau 5 ontdekt de leerling waarom het positioneel ordenen van de bundels van 10 en 100 zo handig is en komt al doende op het idee om onder elkaar af te trekken en vervolgens achteraf te lenen.
- Eenmaal op dit niveau gekomen, kan hij splitsend hoofdrekenen laten voor wat het is en zijn aandacht op positioneel optellen en af trekken richten.

We beschrijven hierna de trend in dit proces die in het schema van figuur 10.10 op pagina 172 in kaart is gebracht en met voorbeelden geïllustreerd.

Figuur 10.9 Formalisering van splitsen via vier niveauverhogingen

NIVEAU III – Systeemgebonden, met behulp van rekeneigenschappen			
5	Positioneel	Met behulp van het cijferalgoritme	62 – 48 via 5 10 6 0 <u>3 5 –</u> 2 5
NIVEAU II – Contextgebonden, op basis van getalrelaties			
4	Semi – positioneel	Via achteraf lenen	62 – 48 via 60 – 40 = 20 → 10 + 2 = 12 en 12 – 8 = 4 10 + 4 = 14
		Kolomsgewijs	62 – 48 via 60 2 40 8 60 – 40 = 20 20 – 6 20 – 6 = 14
3	Structurerend	Met tekorten	62 – 48 via • 40 af die 60 is 20; 8 af die 2, kan niet. Moet je niet 20 maar 10. 10 (van die 20) en 2 erbij is 12, eraf 8 is 4, dus 14. 40 – 60 = 20; 8 – 2 = 6; 20 – 6 = 14
2	Lineair-decimaal	Met de mengvorm splitsen-rijgen	62 – 48 via 60 – 40 = 20, erbij 2 is 22, eraf 8 is 16
1		Met groepen van tien en losse eenheden	36 – 25 via • 3 – 2 = 1, 6 – 5 = 1; 20 + 1 = 21 • 30 – 20 is (30) → 20, 10 6 – 5 is 5, 4, 3, 2, 1; samen 11
Niveaus van splitsen		Splitshandelingen	Voorbeeldberekeningen

Startniveau

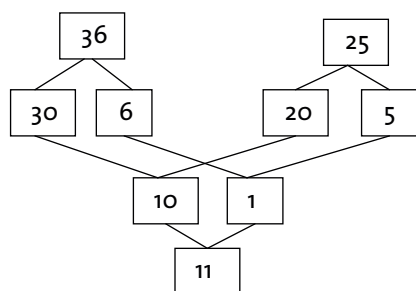
Splitsen is aanvankelijk niets anders dan ‘samengesteld’ optellen en aftrekken met tienvouden en eenheden. Het vloeit direct voort uit tellen en meten met eenheden van 10 en 1, dat de elementaire notie van ‘tientalligheid’ verschaft (Treffers en de Moor, 1992).

Leerlingen splitsen vooral, als ze de handeling of de relatie die in de opgave is beschreven in de vorm van een aftrekking hebben gesymboliseerd, bijvoorbeeld:

- $25 - 12 = ?$ bij opgave 1 en $36 - 25 = ?$ bij opgave 5 (aanvullen);
- $40 - 24 = ?$ bij opgave 6 (vergelijken);
- $100 - 48 = ?$ bij opgave 9 (part bepalen) en
- $900 - 595 = ?$ bij opgave 14 (afhalen).

Al deze contextgebonden aftrekkingen worden volgens dezelfde systematiek gestructureerd en uitgerekend.

Voorbeeld: $36 - 25$



$$\begin{aligned}
 36 - 25 &= (30 + 6) - (20 + 5) \\
 (30 + 6) - (20 + 5) &= (30 - 20) + (6 - 5) \\
 (30 - 20) + (6 - 5) &= 10 + 1 \\
 10 + 1 &= 11
 \end{aligned}$$

- De leerling splitst eerst beide getallen af in zoveel ‘tienen’ en zoveel ‘lossen’,
- structureert vervolgens de aftrekking in twee parten $\rightarrow 36 - 25 = (30 + 6) - (20 + 5)$,
- rekent vervolgens elk ‘part’ uit $\rightarrow 30 - 20 = 10$; $6 - 5 = 1$
- en groepeerde ten slotte de overgebleven tienvouden en eenheden: $10 + 1 = 11$

Dit type herleidingen stoelt op de wetenschap dat:

- getallen uit tienvouden en eenheden bestaan (principe van de bundeling van eenheden in groepen van 10);
- de getallen van een optelling verschillend kunnen worden gegroepeerd en afgesplitst en van plaats kunnen wisselen (associatieve en commutatieve eigenschap van optellen):

$$(30 + 6) - (20 + 5) = (30 - 20) + (6 - 5) \rightarrow (30 - 20) + (6 - 5) = 10 + 1$$

Als leerlingen voldoende ervaring hebben opgedaan met tellen en meten met eenheden van 10 en 1 ontdekken ze dat ze ook zonder objecten kunnen tellen en meten, door gewoon de telwoorden op te zeggen. Ze gebruiken daarbij de vingers eerst om de eenheden van tien bij te houden, omdat ze op dit ontwikkelingsniveau nog niet weten dat de tienvouden veelvouden van tien zijn:

- tien (duim), twintig (wijsvinger), dertig (middenvinger);
- een, twee, drie, vier, vijf, zes;
- dertig en zes erbij is samen zesendertig.

Op basis van deze kennis van tellen en meten en dit gebruik van dubbel tellen om eenheden van tien samen te nemen of af te halen, komen leerlingen op het idee om de tienvouden en eenheden van aftrekoperaties te bewerken, zoals hierboven beschreven en gesymboliseerd.

Eerste niveauverhoging: van optellen en aftrekken met tien en lossen naar aftrekken met de mengvorm splitsen-rijgen

In de overgangsfase ontdekken leerlingen dat elk rond getal een veelvoud is van 10: $40 = 4 \times 10$, $60 = 6 \times 10$, $90 = 9 \times 10$, etc. Ze kunnen dan in twee richtingen redeneren:

- 4 dozen van 10 eieren is evenveel als 40 eieren ($4 \times 10 = 40$)
 Én: om 40 eieren te hebben, moet ik 4 dozen van 10 volmaken
- 3 briefjes van 10 euro zijn evenveel waard als 30 euromunten
 Én: ik moet 30 euromunten geven om 3 briefjes van 10 euro te krijgen.

Deze conceptie van de getallen maakt het mogelijk om elk willekeurig getal in zoveel tien en zoveel enen af te splitsen (57 als 5T en 7E) en om elk willekeurig aantal tientallen en eenheden direct tot een tweecijferig getal te combineren (6T en 2E als 62).

In dezelfde periode maken de leerlingen nader kennis met de associatieve eigenschap van optellen via het samenstellen en afsplitsen van hoeveelheden en grootheden (48 als $20 + 20 + 4$ of $24 + 24$ en 65 als $20 + 20 + 20 + 5$, $20 + 45$ of $40 + 25$). Dit alles maakt de combinatie van splitsen met rijgen mogelijk:

$62 - 48$ via

(1) afsplitsen (62 als 6T en 2E, 48 als 4T en 8E);

(2) tientallen bewerken: $6T - 4T = 2T$ of $60 - 40 = 20$, want $6 - 4 = 2$;

- (3) tussenstap op basis van de associatieve eigenschap van optellen: $20 + 2 = 22$;
 (4) eenheden sequentiële bewerken: $22 - 8$ via 8 stappen terug vanaf 22.

Tweede niveauverhoging: van lineair-decimaal splitsen met de mengvorm naar structurerend splitsen met tekorten

Leerlingen maken een grote sprong vooruit, als ze een manier hebben gevonden om de eenheden anders dan rijgend te bewerken. Het vergelijken van hoeveelheden en grootheden en voorspellen of vaststellen van het effect van een verandering, legt de basis voor deze transformatie. Leerlingen realiseren zich bijvoorbeeld dat het overgebleven stuk van een plank te kort is om de laatste legplank van de boekenkast in aanbouw te maken of dat ze 6 euro missen om de trui te kopen die op de reclamefolder staat. Op basis van dergelijke ervaringen ontwikkelen ze het concept 'tekort', negatieve getallen om een tekort te symboliseren (-6 als 6 cm of 6 euro tekort) en het idee 'symmetrische' handelingen en 'symmetrische' getallen om een tekort op te heffen (teruggeven als tegenhanger van lenen en $+6$ als tegenhanger van -6). Uit deze leerervaring ontspringt het idee om 'onmogelijke' aftrekhandelingen met behulp van tekorten op te lossen:

$62 - 48$ via

$60 - 40 = 20$

$2 - 8 \rightarrow 6$ tekort, dit kan ik van 20 aftrekken: $20 - 6 = 14$

Derde niveauverhoging: van (achter elkaar) splitsen met tekorten naar kolomsgewijs aftrekken

Bij de transformatie van aftrekken met tekorten naar kolomsgewijs aftrekken maakt de leerling een grote sprong vooruit door de overgang van 'horizontaal' naar 'verticaal' rekenen, dat wil zeggen van rekenen gebaseerd op het tellen van hoeveelheden, naar rekenen gebaseerd op de positionele ordening van de eenheden, tientallen, honderdtallen, etc. Om dit te kunnen doen moet de leerling de getallen van een aftreksituatie positioneel analyseren, bijvoorbeeld 62 en 48 (in $62 - 48$) in de vorm van de $(6 \times 10) + (2 \times 1)$ en $(4 \times 10) + (8 \times 1)$. Vanuit dit beeld van de getallen kunnen ze begrijpen dat het loont om ze onder elkaar in een schema op te schrijven ('tussen strepen' zetten of 'HTE'-sommen in het schooljargon), om de positiewaarden overzichtelijker (met behulp van geheugenfeiten) te kunnen bewerken:

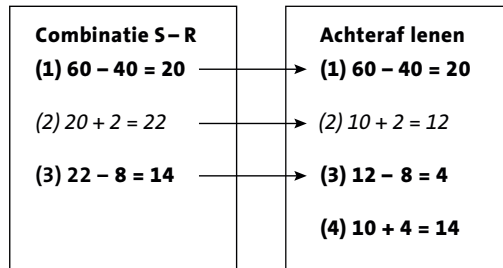
H	T	E
	6	2
	4	6

Op basis van de geobserveerde oplossingen kan niet worden vastgesteld hoe leerlingen in deze fase op het idee van 'achteraf lenen' komen, omdat te weinig berekeningswijzen van dit type zijn geobserveerd.

Rekenkundig gezien is 'achteraf lenen' geënt op de combinatie van splitsen en rijgen:

De startbewerking is hetzelfde: $60 - 40 = 20$ of $6T - 4T = 2T$ of $6 - 4 = 2$.

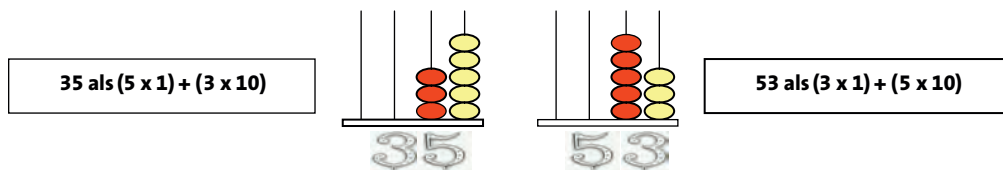
Het lenen van 10 om de eenheden af te trekken ($10 + 2 = 12$) vervangt in wezen de tussenstap die de leerling 'vroeger' maakte ($20 + 2 = 22$) om van splitsend aftrekken ($40 - 20 = 20$) naar rijgend aftrekken over te gaan ($22 - 8 = 14$).



Dit schema van achteraf lenen zou dan ook, vanuit het standpunt van een middenbouwleerling gezien, een vanzelfsprekende oplossing kunnen zijn voor het omslachtig onder elkaar aftrekken met tekorten. Het zou tevens de weg kunnen banen voor de grote omslag: de overgang van aftrekken van links naar rechts met positiegetallen naar aftrekken van rechts naar links met positiecijfers.

Vierde niveauverhoging: van kolomsgewijs splitsen naar algoritmisch aftrekken

Leerlingen kunnen het kolomsgewijs aftrekken niet van de ene op de andere dag transformeren in algoritmisch splitsen. Ze moeten namelijk (1) hun kijk op de getallen drastisch wijzigen en (2), vanuit deze nieuwe visie een handigheid ontwikkelen om deze getallen systematisch te bewerken. De manier waarop Nederlanders en Portugezen een verjaardagtaart versieren, maakt het verschil in getalbegrip pregnant. Wij prikken 35 en 53 kaarsjes in de taart van iemand die 35 en 53 wordt, terwijl Portugezen slechts twee cijferkaarsjes prikken: een 'drie' en een 'vijf' voor de ene taart en een 'vijf' en een 'drie' voor de andere:



Deze positionele analyse van de getallen maakt het mogelijk om verticaal, van rechts naar links af te trekken, een manier van doen die leerlingen niet uit zichzelf kunnen ontdekken, maar die leraren, met behulp van onder andere de abacus, overzichtelijk moeten helpen reconstrueren.

Figuur 10.10 Niveaus van de formalisering van splitsen

NIVEAU III – Systeemgebonden, met behulp van rekeneigenschappen					
5	Positioneel		Tientalligheid: positionele ordening van de eenheden, tientallen, honderdtallen, etc. analogie van 4 + 5 met 40 + 50 en 400 + 500	Optellen en aftrekken volgens vaste rijgschema's	5 10 6 2 4 8 – 1 4
NIVEAU II – Contextgebonden, op basis van getalrelaties					
4	Semipositieeneel	Positionele relatie tussen de tientallen en de eenheden		Achteraf lenen	62 – 48 via 60 – 40 = 20 10 + 2 = 12 → 12 – 8 = 4 10 + 4 = 14
				Kolomsgewijs optellen en aftrekken met positiewaarden	62 – 48 via 60 2 40 8 60 – 40 = 20 20 – 6 20 – 6 = 14
3	Structurerend	48 als (4 x 10) + (8 x 1) – 1, – 2, – 3, etc. als ‘tegenhanger’ van 1, 2, 3		Aftrekken met tekorten	62 – 48 via 60 – 40 = 20 2 – 8 → 6 tekort 20 – 6 = 14
2	Lineair-decimaal (b)	36 als 1, 2, 3 groepen van tien (c.q. tientallen) en 1, 2, 3, 4, 5, 6 losse		Aftrekken met ‘tienen’ in combinatie met rijgen	62 – 48 via 60 – 40 = 20 20 + 2 = 22 22 – 8 = 20 – 6 = 14
1	Lineair-decimaal (a)	Relatie tussen de tientallen en de eenheden en associatieve eigenschap: 36 – 25 = (30 + 6) – (20 + 5) = (30 – 20) + (6 – 5) = 10 + 1 = 11	Een aftrekking (c – b = a) (of optelling a + b = c) representeert een verandering of een relatie tussen hoeveelheden (of grootheden)	Tellend aftrekken met tien en lossen	36 – 25 via 30 – 20 is 20, 10 6 – 5 is 5, 4, 3, 2, 1 10 + 1 = 11
Niveau van formalisering		Gebruikte structuur en relaties	Representatie van de rekenrelatie	Rekenhandelingen	Geobserveerde voorbeeldberekeningen
		Veranderingen in de loop van het proces			

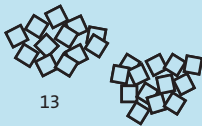
Integratie van de formalisering van splitsen met de formalisering van rijgen

In de laatste constructiefase zijn dwarsverbindingen gelegd tussen niveaus van rijgen en niveaus van splitsen om zicht te krijgen op de rijg- en splitsprocedures die leerlingen naast elkaar ontwikkelen en leren gebruiken en op de relatie tussen deze hoofdrekenprocedures. Dit heeft geleid tot een model waarin acht niveaus worden onderscheid om de formalisering van rijgend en splitsend hoofdrekenen stap voor stap te beschrijven, uitgaande van de drie onderscheiden fasen in het denken over getallen, optellen en aftrekken. Figuur 10.11 laat zien hoe de formalisering van het rijgen die in hoofdstuk 7 is beschreven parallel loopt met de hierboven beschreven formalisering van splitsen.

We lichten dit kort toe.

- Leerlingen kunnen in principe in dezelfde periode via het tienvoud rijgen en met tien en enen splitsen. Het verworven inzicht in de tientallige opbouw van de getallen vanuit de verworven kennis van tellen en meten met eenheden van tien en één vormt de basis voor rijgen en splitsen op niveau 4. Verder springen en terugspringen met sprongen van tien vanaf een willekeurig tienvoud is de voorwaardelijke vaardigheid die bij dit begrip van tientalligheid hoort. Een derde bindend element, dat bij dit getalbegrip en telvaardigheid hoort, is de wetenschap dat de getallen in intervallen van tien zijn geordend en dat het aantal tienvouden en eenheden ‘bepalen’ waar een getal in een bepaald interval van de telrij staat.
- Leerlingen die rijgen met splitsen combineren leggen het verband tussen rijgen en splitsen op basis van hun inzicht in de relatie tussen de twee ‘parten’ van een getal en de associatieve eigenschap van optellen. Hetzelfde inzicht in de relatie tussen de tientallen en de eenheden is ook nodig om, vanuit een willekeurig getal, met de 10-sprong af te trekken. Daarom verbinden we rijgen met de 10-sprong met splitsen met de mengvorm (niveau 5).
- De gemeenschappelijke basis voor structurerend rijgen en splitsend aftrekken met tekorten is de wetenschap dat 20, 30, 40, etc. evenveel is als 2×10 , 3×10 , 4×10 , etc. Leerlingen kunnen daarom geheugenfeiten tot 10 gebruiken om met tienvouden op te tellen en af te trekken ($80 - 60 \equiv 8 - 6$) in plaats van met sprongen van tien te rekenen. Het bindende element met structurerend rijgen is dus het gebruik van de dubbel-, vijf- en splitsstructuur van de getallen tot 10 voor de bewerking van de tienvouden. Wellicht is de notie van tekort ook verbonden met lineair compenseren in de fase dat een leerling 100-48 met twee sprongen op een lege getallenlijn uitrekt: eerst 100 eraf 50 is 50 en vervolgens 50 erbij 2 is 52. Om die redenen verbinden we – op niveau 6 – splitsen met tekorten met structurerend rijgen.
- Onder elkaar splitsen is formeler dan splitsen met tekorten, omdat de leerling zijn rekenhandeling vertikaal, van de ene positie naar de andere, structureert en noteert. Het verschil met structurerend rijgend is dat de leerling los van de telrij en puur met rekengetallen aftrekt. Niveau 7 markeert deze overgang van hoofdrekenen in sommentaal naar kolomsgewijs hoofdrekenen.
- Algoritmischesplitsen behoort tot het hoogste niveau van rekenen. Het overstijgt zelfs het niveau van gestandaardiseerd rijgen door het gebruik van positiecijfers in plaats van ‘hele’ getallen (positiewaarden). Het bindende element is dat de leerling puur getalsmatig opereert, volgens een systematiek die afgestemd is op de twee kenmerken van het systeem van hele getallen: de bundeling in eenheden van tien en de positionele ordening van deze eenheden. Daarom wordt op niveau 8 gestandaardiseerd rijgen met algoritmisch aftrekken verbonden.

Figuur 10.11 Formalisering van de rijprocedures

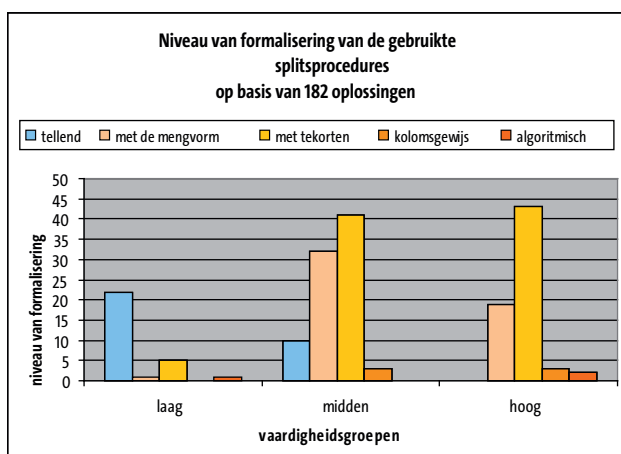
NIVEAU III – Systeemgebonden, met behulp van rekeneigenschappen		
Gestandaardiseerd $62 - 48 = ?$ via $62 - 40 = 22$ $22 - 8 = 14$	8 REKENKUNDIG	Algoritmisch $62 - 48 = ?$ via $5 \ 10$ $6 \ 2$ $\underline{4 \ 8 \ -}$ $1 \ 4$
NIVEAU II – Contextgebonden, op basis van getalrelaties		
	7 SEMIPOSITIONEEL	Achteraf lenend $62 - 48 = ?$ via $60 - 40 = 20$ $10 + 2 = 12 \rightarrow 12 - 8 = 4$; $10 + 4 = 14$ Kolomsgewijs $62 - 48 = ?$ via $ \ 60 \ \ 2 \ $ $ \ 40 \ \ 8 \ \ 60 - 40 = 20$ $ \ 20 \ \ -6 \ \ 20 - 6 = 14$
Aftrekkend met tienvouden $62 - 48$ via $62 - 40 = 22$ $22 - 8 = 20 - 6 = 14$	6 STRUCTUREREND	Met tekorten $62 - 48 = ?$ via $60 - 40 = 20$ $2 - 8 \rightarrow 6$ tekort $20 - 6 = 14$
Startend met een tiensprong $62 - 48$ via $(62) \rightarrow 52, 42, 32, 22$ $22 - 8$ via $22 - 2 = 20$ en $20 - 6 = 14$ $48 + ? = 62$ via $48 + 10 = 58$ $58 + 4 = 62$; $10 + 4 = 14$	5 LINEAIR-DECIMAAL	Met de mengvorm splitsen-rijgen $62 - 48 = ?$ via $60 - 40 = 20$ $20 + 2 = 22$ $22 - 8 = 20 - 6 = 14$
Springend naar een tienvoud $62 - 48 = ?$ via $62 - 2 = 60$ $60 - 40 \rightarrow 50, 40, 30, 20$; $20 - 6 = 14$ $48 + ? = 62$ via $48 + 2 = 50$ $50 + 10 = 60$; $60 + 2 = 62$; $10 + 2 + 2 = 14$	4 LINEAIR-DECIMAAL	Tellend, met tien en lossen $36 - 25$ via $36 = 30 + 6$; $25 = 20 + 5$ $30 - 20$ is $20, 10$ $6 - 5$ is $5, 4, 3, 2, 1$ $10 + 1 = 11$
Dubbel tellend $12 + ? = 25$ via $12 \rightarrow 13(1), 14(2), 15(3), 16(4), 17(5), 18(6), 19(7),$ $20(8), 21(9), 22(10), 23(11), 24(12), 25(13)$	3 ORDINAAL	
Verkort tellend met objecten $12 + ? = 25$ via 	2 SEMI-ORDINAAL	
NIVEAU I – Handelingsgebonden, met behulp van verzamelingen objecten		
Drie keer tellend $12 + ? = 25$ via 	1 FIGURATIEF	
Niveaus en vormen van rijgen	Niveaus van formalisering	Niveaus en vormen van splitsen

Niveau van formalisering in de groepen Laag, Midden en Hoog

De resultaten in de tabel en de staafgrafieken van figuur 10.12 geven een idee van de mate van formalisering van de gebruikte splitsprocedures en het behaalde succes.

- In drie van de vier splitsoplossingen van de groep Laag rekent de leerling met tien en lossen (niveau 4). Het resultaat is erg laag voor dit niveau van splitsen (40%). In 5 van de 29 oplossingen splitst de leerling met tekorten. Het antwoord is telkens goed.
- Leerlingen uit de middengroep splitsen het vaakste met de mengvorm en met tekorten. Ze behalen de beste resultaten met de mengvorm (50% goed) en beheersen het splitsen met tekorten (32% goed) onvoldoende.
- Leerlingen uit de groep Hoog rekenen in twee op de drie oplossingen met tekorten en gebruiken daarnaast ook regelmatig de mengvorm (20% van de oplossingen). Er worden alleen met de mengvorm goede resultaten bereikt (ongeveer 80% goed). Splitsen met tekorten leidt in één op de twee oplossingen tot een onjuiste uitkomst. Er wordt daarnaast drie keer kolomsgewijs gesplitst. Twee van de drie uitkomsten zijn juist.

Figuur 10.12 Niveau van formalisering in de groepen Laag, Midden en Hoog en bijbehorende prestaties



Groep	Succes				
	(4) Tellend met tien en lossen	(5) Met de mengvorm	(6) Met tekorten	(7) Kolomsgewijs en achteraf lenen	(8) Algoritmisch
Laag	9 van de 22 (40%)	0 van de 1	5 van de 5	n.v.t.	1 van de 1
Midden	8 van de 10	16 van de 32 (50%)	13 van de 41 (32%)	2 van de 7	
Hoog	n.v.t.	15 van de 19 (79%)	22 van 43 (50%)	2 van de 3	0 van de 2

Concluderend kan worden gesteld dat splitsend aftrekken in alle drie de vaardigheidsgroepen problematisch is, het meest in de middengroep. Deze leerlingen scoren alleen op het startniveau van splitsen goed, als ze met tien en enen aftrekken.

Er zijn twee lichtpuntjes: het succes bij aftrekken met tekorten in de groep laag en de goede resultaten die leerlingen uit de groep hoog behalen als ze de mengvorm toepassen.

10.5 Foutenanalyse

Onderzochte fouten

Al bij het eerste rekenonderzoek, bereikten leerlingen met splitsen minder goede resultaten dan met rijgen (Beishuizen, 1983). In de loop der jaren is daar weinig aan veranderd (Beishuizen en van Mulken, 1988; 1991). Het onderzoek van Willemsen en Harskamp (1990) naar systematische fouten bij optellen en aftrekken tot 100 laat zien dat de groep 25% laagste presterende leerlingen in die periode vooral splits- en telfouten maakte. Twintig van de 39 geobserveerde leerlingen maakten bijvoorbeeld de omkeringsfout ($72 - 18 = 66$). Deze fout werd 51 keer gemaakt in een toets met 5 opgaven van dit type.

De door ons gemeten prestaties hebben de volgende aanwijzingen gegeven over de problemen die leerlingen uit jaargroep 5 bij splitsen ondervinden:

- Leerlingen uit de groep Laag kunnen niet foutloos met tien en lossen aftrekken via aanvullend optellend. Deze leerlingen maken ook regelmatig fouten, als ze op dit niveau aftrekken.
- Leerlingen uit de groep Midden kunnen slecht met tekort aftrekken. Ze beheersen ook onvoldoende de mengvorm.
- Leerlingen uit de groep Hoog maken eveneens regelmatig fouten als ze met getallen groter dan 100 met tekorten aftrekken.

Op basis van deze indicaties zijn de foutieve oplossingswijzen van de opgaven van figuur 10.13 geselecteerd om de aard en de bron van de geobserveerde rijgfouten te identificeren.

Figuur 10.13 Geanalyseerde foutieve splitshandelingen per vaardigheidsgroep

Groepen	Strategieën en procedures	Opgaven
Laag	Aanvullend optellen met tien en enen	1 en 2
	Aftrekken met tien en enen	2 en 4
Midden	Aftrekken met de mengvorm splitsen-rijgen	12 en 13
	Aftrekken met tekorten	8, 10, 12 en 13
Hoog	Aftrekken met tekorten	12, 14 en 16

Onderzoeksvragen

De geselecteerde foutieve splitsoplossingen worden vanuit de vijf onderstaande vragen rekenkundig geanalyseerd:

Met betrekking tot de splitsprestaties in de groep Laag:

- 1 Wat is de bron van fouten bij aanvullend optellen met tien en enen?
- 2 Welke structurele fouten maken leerlingen die met tien en enen aftrekken?

Met betrekking tot de splitsprestaties in de groep Midden:

- 3 Welke structurele fouten maken de leerlingen, als ze de mengvormen gebruiken?
- 4 Wat is de aard en de bron van de problemen bij structurerend aftrekken op niveau 6?

Met betrekking tot de splitsprestaties in de groep Hoog:

- 5 In hoeverre maken leerlingen bij aftrekken met tekorten met getallen groter dan 100 dezelfde fouten als bij het bewerken van getallen kleiner dan 100?

Analyse

Onderstaande typen foutieve oplossingen zijn geanalyseerd:

- Laag: aanvullen met tien en enen (opgaven 1 en 2);
- Laag: aftrekken met tien en enen (opgaven 2 en 4);
- Midden: aftrekken met de mengvorm (opgaven 12 en 13);
- Midden: structurerend aftrekken (opgaven 8, 10, 12 en 13);
- Hoog: aftrekken met tekorten (opgaven 12, 14 en 16).

Resultaten

Groep Laag

- *Wat is de bron van fouten bij aanvullend optellen met tien en enen?*

In zes oplossingen van de groep Laag lost de leerling opgave 1 of 2 op met tien en enen aanvullend optellend. In drie gevallen leidt het tot een onjuiste uitkomst. In alle drie de gevallen is het begrip van aanvullend optellen in het geding.

Begrip

Begrip van aanvullend optellen met tien en enen

Twee typen fouten zijn geobserveerd:

- verwarring tussen optellen en aanvullend optellen;
- foutieve interpretatie van de uitgevoerde splitshandelingen.

Geobserveerde fouten bij aanvullen met tien en enen in de groep Laag

Verwarring

Opgave 2: $18 + ? = 22$ (leerling 272)

Hij is 18 kilo zij is ...nee. Zij is 18 hij is 22. 18 naar 22 is 16 kilo. 18 plus ... 10 is 20; 2; nog 8 erbij is 16.

(bedoelt: 10 erbij om 20 te krijgen; 6 erbij om 8 te krijgen, samen plus 16)

Foutieve interpretatie van de splitshandelingen

Opgave 1: $12 + ? = 25$

(leerling 37)

Na enige denktijd zegt hij: $12 + 13 = 25$ en schrijft 25 in het antwoordhokje

Uitleg: $2 + 3 = 5$; $10 + 10$ erbij is al 20 dus, $5 + 20 = 25$

(leerling 73)

$10 + 10 = 20$; erbij 4, erbij 1 is 25. (Er komt geen antwoord, dus herhaling). 10 is 20; erbij 3 en 2 samen 5; antwoord 3

Leerling 272 probeert aanvullend op te tellen, maar raakt in de war. Wellicht haalt hij twee splitsschema's door elkaar: aanvullen met 10 (10 bij de 10 van 18 om de 20 van 22 te krijgen) en aftrekken met eenheden (8 eraf 2 is 6). De kern van het probleem ligt vermoedelijk deels in het

begrip van overbruggen en deels in de voorstelling die de leerling van 18 en 22 heeft (orde van grootte van 18 en 22 in relatie tot hun plaats in de telrij en relatie hoeveelheidgetal en telgetal). Leerling 37 geeft het bereikte getal (het totaal) als antwoord en leerling 73 de toegevoegde eenheden. Wellicht maken beide leerlingen gewoon een slordigheidsfout.

Conclusie

Bovenstaande voorbeelden wijzen uit dat leerlingen uit de groep *Laag* fouten maken bij splitsend aanvullen door gebrek aan inzicht in de handelingen die ze uitvoeren. Deze fouten zijn te vergelijken met de fouten die in deze vaardigheidsgroep bij rijgend aanvullen zijn geïdentificeerd (zie hoofdstuk 8).

- *Welke structurele fouten maken leerlingen die met tien en enen aftrekken?*

Geobserveerde fouten

In tien oplossingen heeft de leerling opgave 2 of 4 met tien en enen aftrekkend opgelost. In alle gevallen wordt een foutieve uitkomst gevonden. Alle fouten komen voort uit de misconceptie van aftrekken met tien en enen in relatie met het getalbegrip.

Begrip

Begrip van aftrekken met tien en enen

De voorbeelden illustreren de drie typen fouten die uit de misconceptie van het aftrekschema voortkomen:

- leerling 127 en 257 goochelen met cijfers;
- leerling 276 verwisselt de eenheden;
- leerling 109 voegt de eenheden bij de resterende tientallen toe.

Geobserveerde fouten bij aftrekken met tien en enen in de groep Laag

Goochelen met cijfers

Opgave 2: $22 - 18 = 16$

(leerling 127)

Eerst tientallen: 10 eraf (wegdenken), dan de getallen uitrekenen $8 - 2 = 6$, dan schrijft hij 16 als antwoord. (Rekent waarschijnlijk als volgt: $18 - 22$ via $(1)8 - (2)2$; $8 - 2 = 6$ en weer 10 erbij is 16)

(leerling 257)

Snapt het niet. De tekst wordt opnieuw gelezen.

$18 - 20 = 8$ ($8 - 0$); $2 - 8$ ($8 - 2$); 8 en 6 bij elkaar is 16

Eenheden verwisselen

Opgave 4: $60 - 35 = 35$ (leerling 276)

$6 - 3 = 3$; $5 - 0 = 5$; 35

Hergroepen zonder bewerking van de eenheden

Opgave 4: $60 - 35 = 35$ (leerling 109)

$60 - 3$, nee $6 - 3 = 3$. Blijft 5 over, dus 35

Conclusie

De geobserveerde splitsfouten wijzen erop dat sommige leerlingen uit de groep *Laag* met positiecijfers proberen af te trekken terwijl hun getalbegrip en hun begrip van splitsend aftrekken ontoereikend is om op deze manier te rekenen.

Samenvattende conclusie

De resultaten van de foutenanalyse wijzen uit dat de typen fouten die leerlingen bij splitsend aftrekken maken deels voortkomen uit misconcepties van splitsen, deels uit de combinatie van splitsen met aanvullend optellen en deels uit het feit dat ze uit het hoofd rekenen. De betreffende leerlingen splitsen gewoon boven hun begripsvermogen. Als gevolg daarvan verwarren ze optellen met aftrekken, verwisselen ze de eenheden of goochelen ze gewoon met cijfers, zoals hun lotgenoten dat in de laatste decennia van de vorige eeuw deden.

Figuur 10.14 Aard en bron van de fouten in de splitsoplossingen van de groep Laag

	Fout	Bron
Deels begrip van aanvullend optellen met tien en lossen, deels oplossingsproces	• verwarring tussen optellen en aanvullend optellen • foutieve interpretatie van de uitgevoerde splitshandelingen	• inadequaat gebruik van splitsen in combinatie met aanvullend optellen van • begrip van de overeenkomsten en verschillen tussen optellen een aanvullend optellend • hoofdrekenen zonder symbolisering van de rekenhandelingen op papier
Aftrekken met tien en lossen	• goochelen met cijfers • eenheden verwisselen • tientallen en eenheden hergroeperen zonder de eenheden af te trekken	• generalisering van de verwisselbaarheid van optellen • begrip van het splitschema

Groep Midden

- *Wat is de aard en de bron van de problemen bij aftrekken met de mengvorm splitsen-rijgen*

In de 31 geobserveerde splitsoplossingen van opgave 12 en 13 trekken de leerlingen af met behulp van de mengvorm splitsen-rijgen. Dit leidt in 15 gevallen tot een foutieve uitkomst. Veertien fouten komen voort uit een misconceptie van de mengvorm. Eén fout is een rekenfout.

Begrip

Begrip van de mengvorm splitsen-rijgen

De weergegeven voorbeelden illustreren de drie begripsfouten die leerlingen uit de middengroep maken.

- Leerling 236 slaat de stap over die het splitsend aftrekken van de tientallen met het rijgend bewerken van de eenheden bindt: 20 erbij 2 is 22 → $22 - 8 = 14$
- Leerling 256 probeert $22 - 8$ splitsend in plaats van rijgend uit te rekenen en verwisselt de eenheden.

Geobserveerde begripsfouten bij aftrekken met de mengvorm splitsen-rijgen in de groep Midden

Schakel tussen spitsen en rijgen overgeslagen

Opgave 12: $62 - 48 = 12$ (leerling 236)

60 eraf 40 is 20 want 6 eraf 4 is 2. Dan doe je er een nul bij (dan gebruikt ze haar handen). 20 eraf 8 is 12.

Foutieve bewerking van de eenheden

Splitsend in plaats van rijgend aftrekken (inclusief de verwisseling van de eenheden)

Opgave 12: $62 - 48 = 6$ (leerling 236)

$40 - 60 = 20$; dan 2 erbij is 22; $22 - 8$, ik bedoel: $8 - 2 = 6$

Procedurele vaardigheden

Er is één fout van dit type geobserveerd die als rekenfout wordt aangemerkt.

Rekenfout

Nadat hij 50 bij 100 heeft toegevoegd ($100 + 50 = 150$), vergist leerling 149 zich bij het uitrekenen van $150 - 80$ en komt op 60 uit in plaats van 70. De uitkomst wordt daarom 51 in plaats van 61.

Geobserveerde procedurele fout bij aftrekken in de groep Midden

Opgave 13: $250 - 189 = 51$ (leerling 149)

Ze denkt dat ze het zo kan uitrekenen: $250 - 180$ en daarna -9 .

$200 - 100 = 100 + 50 = 150 - 80 = 60 - 9 = 51$

Conclusie

Twee factoren verklaren de problemen die leerlingen uit de groep Midden bij het gebruik van de mengvorm splitsen-rijgen ondervinden:

- het begrip van het aftrekschema bij aftrekken tot 100:
1. uit elkaar halen → 2. tienvouden splitsend aftrekken → 3. hergroeperen → 4. eenheden rijgend aftrekken.
- de automatisering van de basisoperaties die nodig zijn om aftrekkingen met getallen groter dan 100 met de mengvorm uit te rekenen:
bijvoorbeeld $150 - 80 = 70$.

- Wat is de aard en de bron van de problemen bij structurerend splitsen (niveau 6)?

In 36 geobserveerde splitsoplossingen van opgave 8, 10, 12 en 13 rekenen de leerlingen met positiewaarden op niveau 6. Dit is het niveau waarop geheugenfeiten tot 10 worden gebruikt om de tienvouden af te trekken en waarop de leerlingen het tekort aan eenheden van het resterende ronde getal aftrekken, bijvoorbeeld:

$62 - 48$ via
 $60 - 40 = 20$
 $2 - 8$, 6 tekort → $20 - 6 = 14$

$620 - 370$ via
 $600 - 300 = 300$;
 $20 - 70$, 50 tekort → $300 - 50 = 250$

Dit leidt in 24 gevallen tot een foutieve uitkomst. In het gros van de gevallen verwisselt de leerling de eenheden. Een leerling maakt een slordigheidsfout bij aftrekken met tekorten.

Begrip van aftrekken met positiewaarden

Begrip van het aftrekschema

Onderstaande typen begripsfouten zijn geobserveerd:

- leerling 59, 83, 92 en 159 verwisselen de eenheden;
- leerling 92 en 11 nemen de eenheden samen;
- leerling 159 goochelt met getalrelaties.

Geobserveerde fouten bij structurerend aftrekken op niveau 6 in de groep Midden

Eenheden verwisseld

Opgave 8: $50 - 32 = 22$ (leerling 59)

$32 - 50$; 30 van de 50 af is 20; $2 - 0 = 2$; dan hou je 20 over en 2 erbij maakt 22

Opgave 10: $100 - 86 = 26$ (leerling 83)

$100 - 80 = 20$ nog niet invullen; $0 - 6 = 6$; $20 + 6 = 26$

Opgave 12: $62 - 48 = 26$ (leerling 92)

$60 - 40 = 20$; $8 - 2 = 6$; dan is het 26

Opgave 13: $250 - 189 = 139$ (leerling 159)

$100 - 200 = 100$; $50 - 89 = 39$; het verschil is 139 meter.

Eenheden samennemen

Opgave 12: $62 - 48 = 10$ (leerling 92)

$60 - 40 = 20$; $20 - 10 = 10$; antwoord is 10

Opgave 12: $62 - 48 = 10$ (leerling 11)

$62 \rightarrow$ eerst $60 - 40 = 20$; 2 erbij 8 is 10; dan min 10 is 10.

Goochelen met getalrelaties

Opgave 12: $62 - 48 = 30$ (leerling 159)

$40 - 60 = 20$; $8 - 2 = 6$; $6 - 10 = 4$; $30! 20 + 6 + 4 = 30$

Oplossingsproces

Er is een procesfout, een slordigheidsfout, geobserveerd, die vermoedelijk voortkomt uit een gebrekkige beheersing van de basisautomatismen.

• Slordigheidsfout

Leerling 59 vergist zich eerst bij het uitrekenen van het tekort, herstelt zijn uitkomst (niet 7 maar 6), maar trekt alsnog 7 van 20 af in plaats van 6.

Geobserveerde slordigheidsfout in de groep Midden

Opgave 12: $62 - 48 = 13$ (leerling 59)

$60 - 40 = 20$; tellen hoeveel je te weinig hebt en dat is 7, nee 6 te weinig. 0 lossen. Antwoord 13. (telt in haar hoofd).

Conclusie

De analyse wijst uit dat de gemaakte fouten bij splitsend aftrekken het gevolg zijn van een gebrekkig begrip van het aftrekschema en de aftrekhandelingen. Dit kan slordigheidsfouten in

de hand werken, omdat de leerling teveel op de afzonderlijke rekenhandelingen moet letten, ten koste van de controle op het oplossingsproces.

Samenvattende conclusie

Het structurele probleem in de middengroep is dat leerlingen splitsprocedures toepassen die ze niet goed begrijpen en die ook deels minder geschikt zijn dan rijgen of afleiden om het onbekende gegeven van de probleemsituatie uit te rekenen. Hierdoor ontstaat de kans dat ze onjuiste handelingspatronen inslijpen.

Figuur 10.15 Aard en bron van de fouten in de splitsoplossingen van de groep Midden

	Fout	Bron
Begrip van de mengvorm splitsen-rijgen	- de leerling slaat de stap tussen het splitsend aftrekken van de tientallen en het rijgend aftrekken van de eenheden over - de eenheden worden, via de foutieve verwisseling, splitsend (en niet rijgend) afgetrokken	voorwaardelijke kennis en vaardigheden voor het begrip en de correcte uitvoering van de mengvorm splitsen-rijgen
Begrip van aftrekken met positiewaarden en tekorten	- eenheden verwisselen - eenheden samennemen - goochelen met getalrelaties	
Rekenfout (wellicht door gebrekkige controle op de handelingen)	basisoperatie van het type $150 - 80$	- automatisering - geen aantekeningen op papier, waardoor een gemaakte slordigheidsfout of rekenfout over het hoofd wordt gezien
Slordigheidsfout	vergissing bij het verwerken van de tekorten	geen aantekeningen op papier, waardoor een gemaakte slordigheidsfout of rekenfout over het hoofd wordt gezien

Het verwisselen van de eenheden is het schoolvoorbeeld. Dat zoveel fouten van dit type worden gemaakt, is ernstig:

- ten eerste omdat het een hardnekkig probleem is;
- ten tweede, omdat deze misvatting betekent dat de betreffende leerlingen meer instrumenteel dan inzichtelijk met de getallen opereren;
- ten derde, omdat het blijkbaar voor leraren moeilijk is om de problemen bij leren splitsen tijdig te signaleren en te diagnosticeren en hen te helpen het tellen met tien en enen tot overzichtelijke en efficiënte splitsbehandelingen te transformeren.

Leerlingen die nu al getallen groter dan 100 splitsen lopen het risico dat ze, naast begripsfouten, ook rekenfouten van het type $150 - 80 = 60$ maken, omdat ze voorwaardelijke basisoperaties nog onvoldoende hebben geautomatiseerd. Dit vermoeden wordt ondersteund door onderstaande aanwijzingen die de fouten van de meest vaardige leerlingen weergeven.

Groep Hoog

- *In hoeverre maken leerlingen bij aftrekken met tekorten met getallen groter dan 100 dezelfde fouten als bij het bewerken van getallen kleiner dan 100?*

In 38 oplossingen hebben leerlingen uit de groep Hoog opgave 12 (rekenen tot 100) en opgave 14 en 16 (rekenen tot 1.000) structurerend uitgerekend (zie de voorbeelden bij de resultaten in de groep Midden). In 17 gevallen heeft het tot een foutieve uitkomst geleid. In 9 gevallen heeft de leerling de eenheden verwisseld.

Begrip van aftrekken met positiewaarden

Begrip van het aftrekschema

Twee typen begripfouten zijn geïdentificeerd:

- het verwisselen van de eenheden, bij aftrekken tot 100 én 1.000;
- het foutief oplossen van het tekort, bij aftrekken tot 100 én 1.000.

In onderstaande voorbeelden verwisselen de leerlingen de eenheden.

Geobserveerde fouten bij structurerend aftrekken op niveau 6 in de groep Hoog

Eenheden verwisseld bij aftrekken tot 100

Opgave 12: $62 - 48 = 26$

(leerling 81) $60 - 40 = 20$; $8 - 2 = 6$; 26

(leerling 45) $8 - 2 = 6$; $60 - 40 = 20$; 6 erbij is 26

Eenheden verwisseld bij aftrekken tot 1000

Opgave 14: $620 - 370 = 350$

(leerling 33) $600 - 300 = 300$; $20 - 70 = 50 \rightarrow 350$

(leerling 114) $600 - 300 = 300$; van 70 doe ik 50 eraf, is weer 20, dus 350 (denkt aan $70 - 50 = 20$)

Opgave 16: $900 - 595 = 495$

(leerling 90) $500 - 900 = 400$ (bedoelt $900 - 500 = 400$); $90 - 0 = 90$; $5 - 0 = 5$, dus 495

De overige voorbeelden illustreren het goochelen met getalrelaties bij de oplossing van het tekort.

Goochelen met getalrelaties

Opgave 12: $62 - 48 = 24$ (leerling 45)

40 eraf 60 is 20; 8 eraf 2 is 6. Hoeveel erbij tot 10, is 4. 20 erbij 4 is 24

Opgave 14: $620 - 370 = 300$ (leerling 198)

$620 - 370$ via $600 - 300$; $20 - 70 = 0$; $0 - 0 = 0$; 300?

Concluderende opmerking

Bovenstaande begripfouten zijn in 17 van de 34 geobserveerde splitsberekeningen gemaakt. Negen daarvan zijn gemaakt bij het uitrekenen van $62 - 48$. Dit suggereert dat sommige leerlingen uit de groep Hoog een onjuist splitsschema hebben ontwikkeld dat ook voor de bewerking van getallen groter dan 100 wordt gebruikt. Dit richt de aandacht op wat leerlingen ten aanzien van de getallen, optellen en aftrekken moeten begrijpen en kunnen om het tellen met tien en enen, eerst tot de mengvorm en vervolgens tot aftrekken met tekorten, inzichtelijk te kunnen transformeren.

Figuur 10.16 Aard en bron van de fouten in de splitsoplossingen van de groep Midden

	Fout	Bron
Begrip van aftrekken met positiewaarden en tekorten	• eenheden verwisselen • foutief bewerken van het tekort	• voorwaardelijke kennis en vaardigheden voor het begrip en de correcte uitvoering van het splitschema op niveau 6

10.6 Aandachtspunten

Het gebruikspatroon van splitsen halverwege de basisschool, de resultaten van de leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog en de structurele fouten die ze maken, wijzen erop dat twee kernkwesties in het geding zijn bij het leren splitsen:

- enerzijds, de ontwikkeling, formalisering en automatisering van splitschema's;
- anderzijds, het adequaat leren gebruikmaken van deze splitschema's.

Kort gezegd, leerlingen splitsen regelmatig in situaties waarin ze beter niet kunnen splitsen, omdat ze nog onvoldoende vertrouwd zijn met de splitsprocedures die in die situaties het meest geschikt zijn. Dit stelt de doorgaande lijn en de omgang met verschillen als derde kernkwestie bij leren splitsen aan de orde.

Ontwikkeling, formalisering en automatisering van splitschema's

Leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog maken fouten bij splitsend aftrekken die direct voortkomen uit een of andere misconceptie van het gebruikte splitschema. Dit is ernstig, omdat het betekent dat ze niet over de voorwaarden beschikken om op het betreffende niveau inzichtelijk te leren splitsen. Dit geldt zowel voor splitsen met tien en enen (Laag en Midden) als voor de combinatie splitsen-rijgen (Middengroep) én splitsen met tekorten (Laag, Midden en Hoog).

Adequaat gebruik van splitsen

Veel observaties tonen aan dat splitsen in combinatie met aanvullend optellen niet zo adequaat is omdat de leerling tegelijkertijd de stand van de aanvulhandelingen en die van de splits-handelingen moet bijhouden. Leerlingen uit jaargroep 5 vullen nu relatief vaak splitsend aan en maken daarom fouten die ze wellicht via rijgen (of afleiden) niet zouden maken. Dit is een kernprobleem, omdat ze hierdoor het doel van flexibel hoofdrekenen niet kunnen realiseren.

Implicaties voor de doorgaande lijn en de omgang met verschillen

De geobserveerde fouten geven aan dat de condities waaronder de leerlingen nu leren splitsen structureel moeten worden verbeterd en dat de lijn die voor leren splitsen wordt gevolgd beter moet worden afgestemd op de weg die leerlingen bij leren rijgen volgen.

De leraar moet enerzijds, van tijd tot tijd, opdrachten kunnen kiezen die groepen leerlingen in staat stellen om de splitshandelingen die ze inzichtelijk toepassen op een hoger niveau te formaliseren (ontwikkeling en formalisering van splitschema's). Hij moet anderzijds regelmatig de leerlingen aansporen te overwegen in hoeverre *rijgen*, dan wel *splitsen* geschikt is om, gelet op de context en de getallen, de betreffende opgave *optellend tot* (via aanvullen) dan wel *aftrekkend* (via afhalen) uit te rekenen (afstemming van de hoofdrekenmethode op alternatieve aftrekstrategieën).

11 Afsplitsen en compenseren: het kernprobleem bij rederend aftrekken

228 oplossingen tonen aan dat leerlingen halverwege de basisschool niet goed kunnen afleiden. Het percentage juiste uitkomsten ligt tussen 40% en 60%, afhankelijk van de strategie die de leerling volgt en de procedure die hij toepast. Bij de meest gebruikte vorm van redeneren – afsplitsen en compenseren – schort het aan twee kanten. Leerlingen vergissen zich bij compenseren. Ze leiden bovendien vaak af in situaties waar ze beter zouden kunnen rijden (of splitsen). Een lastig probleem dus, als flexibel hoofdrekenen een kerndoel is voor iedereen.

11.1 Inhoud

In dit hoofdstuk wordt verslag gedaan van de analyse van de 228 geobserveerde oplossingen waarin de leerling de uitkomst van een aftrekopgave met een geheugenfeit heeft geassocieerd of redenerend heeft gevonden. Hoe en hoe goed leerlingen halverwege de basisschool redenerend kunnen hoofdrekenen en welke problemen ze daarbij ondervinden, is vanuit de vier onderstaande vragen onderzocht:

- 1 Welke aftrekstrategie volgen de leerlingen als ze een opgave redenerend oplossen? En: hoe sterk varieert het succes afhankelijk van de gebruikte strategie?
- 2 Welk type redeneringen gebruiken leerlingen als ze niet via rijden of splitsen hoofdrekenen en hoe vaak leiden deze redeneringen tot de juiste uitkomst?
- 3 Is het mogelijk om, op basis van de geobserveerde oplossingen, de weg te schetsen waarlangs leerlingen hun oorspronkelijke redeneringen stapsgewijs formaliseren? Zo ja, op welk niveau redeneren leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog op dit moment?
- 4 Welke structurele fouten maken leerlingen, als ze redeneren in plaats van te rijden of te splitsen?

11.2 Aftrekstrategie

Onderzoeksvragen

- 1 Welke aftrekstrategie volgen de leerlingen als ze een opgave redenerend oplossen?
- 2 Hoe sterk varieert het succes afhankelijk van de gebruikte strategie?

Onderzochte strategieën

De analyse van de rijg- en splitsoplossingen heeft uitgewezen dat leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog strategisch aftrekken. Dit houdt in dat ze, afhankelijk van de context en de getallen, afwisselend *aftrekkend*, *optellend tot of aftrekkend tot* rijgen of splitsen om het onbekende gegeven van de aftreksituatie uit te rekenen. Dit roept de vraag op of ze ook aftrekkend of overbruggend hoofdrekenen.

Dit is noch in Nederland, noch in het buitenland, systematisch onderzocht. De spaarzame gegevens hierover komen voort uit onderzoek naar probleemoplossingen (De Corte en Verschaffel, 1987; Fuson, 1994), de zogenoemde handelingsgerichte diagnostiek (Van Eerde, 1996) en de eerder besproken Leidse onderzoeken naar flexibel hoofdrekenen (onder ander Klein, 1998).

Het diagnostisch onderzoek naar hoe leerlingen uit jaargroep 4 hoofdreenopgaven onder de 100 oplossen, heeft aan het licht gebracht dat leerlingen op twee manieren ‘handig aftrekken’:

- ze splitsen de aftrekking van de opgave af om een aftrekfeit te krijgen dat ze kennen en compenseren daarna deze afsplitsing met optel- of aftrekhandelingen om het ontstane verschil op te heffen (handig rekenen via afsplitsen en compenseren);
- ze bepalen het onbekende verschil tussen het kleinste en het grootste getal van de aftrekepgave, gebruikmakend van het optelfeet dat bij dit verschil hoort (handig rekenen via aanvullen) (Van de Berg e.a., 1994).

De voorbeelden in figuur 11.1 brengen de onderscheiden vormen van aftrekken via afsplitsen enerzijds en verschil bepalen anderzijds in beeld.

Het *redenerend* hoofdrekenen komt sterk tot uitdrukking in de drie vormen van *afsplitsen*. De leerling leidt het onbekende getal van de opgaven direct af uit het gebruikte geheugenfeit. Leerlingen gebruiken in die gevallen telkens een bekend *aftrekfeit* om de onbekende *aftrekrelatie* van de opgave te reconstrueren. Ze passen in die zin een *aftrekstrategie* toe. Het verschil met rijgend en splitsend aftrekken is, dat ze geen aftrekschema toepassen, maar op basis van relaties tussen aftrekkingen redeneren. We herkennen deze vorm van redeneren aan de woorden ‘dan’ en ‘dus’ die leerlingen gebruiken om hun oplossing mondeling toe te lichten.

Als leerlingen aftrekken via ‘verschil bepalen’, redeneren ze op basis van de relatie tussen optellen en aftrekken. Ze leiden niet af in de letterlijke betekenis van het woord, maar *brengen* de aftrekking van de opgave *terug* tot een optelling, wetend dat aftrekken de ‘omkeerbewerking’ is van optellen (Freudenthal, 1984). Ze herleiden, kort gezegd, de aftrekking tot de optelling die erbij hoort. Deze vorm van redeneren is direct herkenbaar aan het woord ‘want’ dat leerlingen gebruiken om hun uitkomst te legitimeren:

- $8 - 3 = 5$ want $5 + 3 = 8$
- $11 - 8 = 3$ want $3 + 8 = 11$
- $51 - 48 = 3$ want $48 + 3 = 51$

Deze manier van redeneren komt overeen met de geobserveerde manieren van rijgen en splitsen waarbij de leerling aanvullend optelt in plaats van af te trekken (zie hoofdstuk 7 en 9). Daarom beschouwen we *herleiden tot een optelling* als de redenering die bij de strategie optellen tot hoort.

Figuur 11.1 Onderscheiden vormen van redenerend aftrekken via 'afsplitsen' en 'verschil bepalen'

Type afsplitsing	Voorbeeld	Gevolgte redenering
Afsplitsen	Oplossen via een 'tien-som'	67 – 29 via 67 – 30 - Ik weet 67 – 30 = 37 29 is één minder eraf - Dan één meer over - Dus 67 – 29 = 38
	Oplossen via 'tien-min-som'	51 – 48 via 50 – 48 48 van de 50 af is 2 - Bij 51 heb je één meer dan bij 50 - Dan houd je één meer over - Dus 51 – 48 is 2 + 1, is 3
	Anders	83 – 37 via 83 – 33 - Ik weet 83 – 33 = 50 37 is vier meer eraf dan 33 - Dan heb je vier minder over 50 – 4 = 46 - Dus 83 – 37 = 46
Verschil bepalen	Via aanvullen	51 – 48 48 + 2 = 50 50 + 1 = 51 2 + 1 = 3
		97 – 64 64 + 30 = 94 94 + 3 = 97 30 + 3 = 33 84 – 57 57 + 30 = 87 87 – 3 = 84 30 – 3 = 33
Donkerblauwe cellen = redenerend aftrekken; lichtblauwe cellen: rijgend aanvullen		

(Bron: Van de Berg e.a. 1994)

In de oplossingen van aftrekepgaven met problemen van het type *aanvullen*, *verschil bepalen* en *part bepalen*, kwamen we veel gevallen tegen waarbij de leerling probeert om het onbekende getal aanvullend redenerend te vinden. Deze leerlingen splitsen optellend af in plaats van aftrekkend en moeten daarom in de tegenovergestelde rekenrichting compenseren, zoals onderstaande voorbeeldoplossingen van opgave 6 dat illustreren:

Voorbeeld: opgave 6

Afsplitsen en compenseren in combinatie met de strategie *aftrekken*:

40 – 24 = ? via 40 – 20 = 20: ik weet 40 – 20 = 20; 24 is vier meer dan 20; dan is het niet 20, maar 16.

Afsplitsen en compenseren in combinatie met de strategie *optellen tot*:

24 + ? = 40 via 20 + 20 = 40: als het twintig was, was het 20. Het is 24; dan gaat 4 van de 20 af, is 16.

We hebben daarnaast ook een derde type redenering opgespoord die leerlingen met aftrekken combineren. Ze interpreteren de aftrekrelatie van de opgave als een *verschil* en rekenen dit

verschil ‘handig’ uit door twee andere getallen te gebruiken, waarvan het verschil gemakkelijker is uit te rekenen:

Voorbeeld: opgave 12

$62 - 48$ via $62 + 2 = 64$ en $48 + 2 = 50$, dan wordt het $64 - 50 = 14$ (60 eraf 50 en 4 erbij)

Uitgaande van bovenstaande onderzoeksgegevens en voorlopige aanwijzingen over het gebruikte repertoire aan redeneringen, zijn drie vormen van redenerend aftrekken onderscheiden die leerlingen met aftrekken en/of optellen tot kunnen combineren, zoals geïllustreerd met de geobserveerde voorbeelden van figuur 11.2. Deze drie vormen van redenerend hoofdrekenen komen overeen met drie vormen van handig rekenen die leerlingen tegenwoordig bij het zogenoemde variarekenen leren: (1) compenseren, (2) aanvullen of overbruggen en (3) gebruikmaken van het principe van het gelijkblijvend verschil (Tal-team, 1999; Menne, 2001).

Figuur 11.2 Geobserveerde voorbeelden van redeneren in combinatie met de strategie aftrekken en optellen tot

	Herleiden tot een optelling (boog- of telop-methode)	Afsplitsen en compenseren	Transformeren (gebruikmaken van het gelijk blijvend verschil)
Aftrekken		$40 - 24 = ?$ - Ik weet $40 - 20 = 20$ 20 is 4 minder dan 24 - dan gaat 4 van 20 af, is 16	$62 - 48$ via $64 - 50$ $62 + 2 = 64$ $48 + 2 = 50$ - dan wordt het $64 - 50$ - is 14 (60 eraf 50 en 4 erbij) 14
Optellen tot	$22 - 18$ via $18 + 4 = 22$ Het is 4! (want) 18 erbij 4 is 22	$24 + ? = 40$ via $20 + 20 = 40$ - Als het 20 was, was het 20. - Maar nu is het 16 - want de 4 komt er ook bij	

Analyse

Om vast te kunnen stellen hoe leerlingen redenerend aftrekken, is uiteindelijk een deel van de oplossingen, die aanvankelijk onder de categorie geheugenfeiten waren gerangschikt, toegevoegd aan de categorie redeneren. Dit betreft die oplossingen uit de categorie geheugenfeiten waarin de leerling de onbekende aftrekrelatie van de opgave direct associeert met het bekende optelfeet dat bij deze aftrekking hoort, wetend dat aftrekken het ‘omgekeerde’ is van optellen.

Met betrekking tot redeneren onderscheiden we twee strategieën:

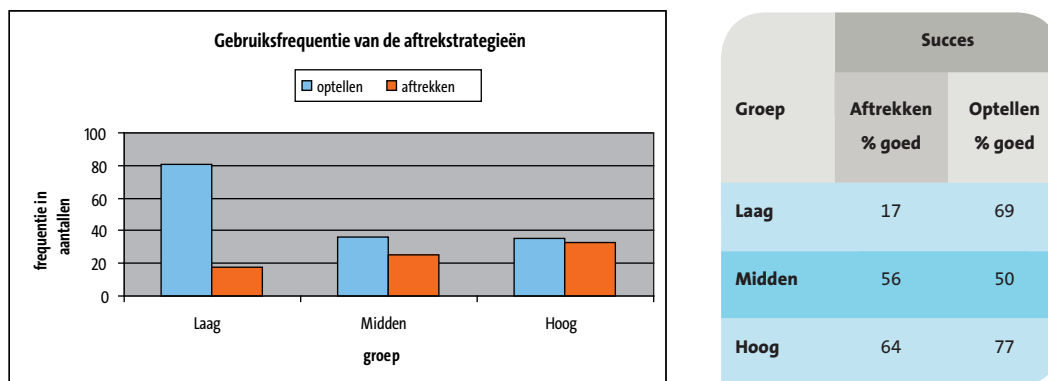
- de aftrekstrategie, wanneer de leerling redeneert op basis van de relatie tussen de aftrekking van de opgave en een bekend aftrekfeit dat hij als referentie neemt;
- de optelstrategie, wanneer de leerling een optelfeet gebruikt om de aftrekking van de opgaven handig uit te rekenen.

Hieronder volgen de resultaten van deze hergroepering.

Resultaten

De resultaten die in figuur 11.3 zijn gepresenteerd geven onderstaande aanwijzingen over het gebruik van de optel- en aftrekstrategie in de groepen Laag, Midden en Hoog en de getoonde prestaties.

Figuur 11.3 Gebruiksfrequentie van optellen en aftrekken en bijbehorende prestaties



- Leerlingen uit de groep Laag passen in 4 van de 5 oplossingen de strategie ‘optellen’ toe. Het antwoord is in 69% van deze oplossingen correct. Redeneren op basis van aftrekrelaties in de resterende oplossingen (18%) leidt in slechts 17% van de gevallen tot een juiste uitkomst.
- Leerlingen uit de middengroep passen in 6 van de 10 oplossingen de optelstrategie toe en behalen met deze aanpak een score van 50% goed. In 4 op de 10 oplossingen wordt de aftrekstrategie met 56% succes toegepast.
- Leerlingen uit de groep Hoog volgen in de ene helft van de oplossingen de optelstrategie en in de andere helft de aftrekstrategie. Ze redeneren beter met optelrelaties (77% goed) dan met aftrekrelaties (64% goed).

Het grote verschil in het gebruik van optellen tussen de groep Laag en de overige groepen hangt samen met de getallen van de opgaven. In de set opgaven van de groep Laag zijn bewust getallencombinaties geplaatst die de leerling aansporen om het onbekende gegeven uit een geheugenfeit af te leiden. De sortering van de oplossingen op basis van de drie typen relaties van figuur 11.1 toont aan, dat de leerlingen uit de groep Laag die de strategie optellen toepassen in ruim één derde van de gevallen de aftrekopgave tot de equivalentte optelling herleiden, bijvoorbeeld $12 + 13 = 25$ bij opgave 1, $18 + 4 = 22$ bij opgave 2 en $25 + 25 = 50$ bij opgave 3. Leerlingen uit de groep Midden redeneren op deze manier in minder dan 1 op de 10 oplossingen en leerlingen uit de groep Hoog in bijna 2 op de 10 redeneeroplossingen.

11.3 Vormen van redenerend aftrekken

Onderzoeksvragen

- 1 Hoe vaak passen de leerlingen van de groepen Laag, Midden en Hoog de geleerde vormen redenerend aftrekken toe?
- 2 Hoe goed beheersen ze deze manier van aftrekken? Wat zijn de prestaties bij de verschillende vormen van redenerend aftrekken?

Onderzochte vormen van redenerend aftrekken

Zoals hierboven gezegd, leren leerlingen in de loop van jaargroep van 3 tot en met 5 drie vormen van handig rekenen die met het begrip variarekenen worden aangeduid:

- afsplitsen en compenseren;
- aanvullen of overbruggen – de zogenoemd *telop-* of *hoogprocedure*;
- optellen en aftrekken gebruikmakend van het principe van de gelijkwaardige som en het gelijkwaardige verschil.

Uitgaande van dit aanbod zijn drie vormen van redenerend aftrekken gedefinieerd:

- De leerling herleidt de aftrekking tot een optelling, als hij de aftrekking van de opgaven direct met het bijbehorende rekenfeit associeert (*want-redenering*):

$$22 - 18 \text{ via } 18 + 4 = 22$$

Het is 4! Want 18 erbij 4 is 22.

- De leerling leidt af, als hij het onbekende getal van de aftrekopgave direct uit een gememoriseerd optelfeit of aftrekfeit afleidt en vervolgens compenseert of dergelijke feiten op een informele manier gebruikt om het onbekende getal van de aftrekopgave te vinden (*als dan-redenering*):

$$24 + ? = 40 \text{ via } 20 + 20 = 40$$

Als het 20 was, dan was het 20. Maar nu is het 16 want de 4 komt er ook bij.

- De leerling transformeert de aftrekking, als hij twee andere getallen gebruikt om het verschil tussen de getallen van de opgave op een eenvoudige manier te kunnen bepalen (*evenveel als-redenering*):

$$62 - 48 \text{ via } 64 - 50$$

$62 + 2 = 64$; $48 + 2 = 50$. Dan wordt het $64 - 50$, is 14.

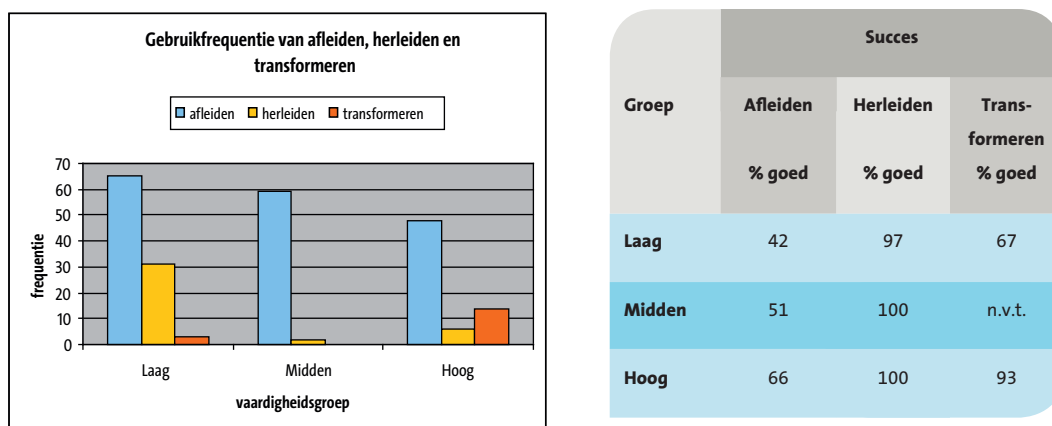
Op basis van deze definities is de procedure van de 228 geobserveerde afleidoplossingen gecodeerd om het repertoire in kaart te brengen en de gebruiksfrequentie en het succes vast te stellen.

Resultaten

De gebruiksfrequentie van de drie onderscheiden vormen van redenerend aftrekken zijn met de staafgrafiek van figuur 11.4 weergegeven, de bijbehorende prestaties met de percentages van de tabel in deze figuur.

We presenteren achtereenvolgens de gebruiksfrequentie en het succes per vaardigheidsgroep.

Figuur 11.4 Gebruiksfrequentie en behaald succes van de drie vormen van redeneren in de groepen Laag, Midden en Hoog



Groep Laag

De gebruiksfrequenties en de prestaties geven onderstaande aanwijzingen:

- Leerlingen uit de groep Laag leiden in 2 op de 3 oplossingen het onbekende getal uit een bekend geheugenfeit af. De uitkomst is in iets meer dan 40% van deze oplossingen correct.
- In vrijwel alle overige oplossingen herleiden ze de aftrekking van de opgave tot de passende optelling. Het antwoord is dan meestal correct.
- Transformeren wordt slechts in drie oplossingen toegepast. Twee daarvan zijn correct.

Concluderend kan worden vastgesteld dat de leerlingen uit de groep Laag handig en succesvol gebruikmaken van het bekende optelfeet dat bij de aftrekking van de opgave past (herleiden). Ze kunnen echter niet goed afsplitsen en compenseren. Dit is een structureel probleem bij redenerend aftrekken in de groep Laag, omdat de leerlingen meestal op deze manier aftrekken, als ze de equivalenten optelling niet gebruiken.

Groep Midden

Als leerlingen uit de middengroep redenerend aftrekken, maken ze in de regel gebruik van afsplitsen en compenseren. Dit gaat hen niet zo goed af. De uitkomst is in één op de twee oplossingen fout.

De twee toegepaste herleidingen waren ten slotte correct.

Dit alles betekent dat leerlingen uit de groep Midden, evenals hun klasgenoten uit de groep Laag, structurele problemen ondervinden bij afleiden. Ze maken ook geen gebruik van transformeren, terwijl opgaven 11 en 12 op deze manier kunnen worden opgelost:

$$\text{Opgave 11: } 102 - 90 = 100 - 88 = 12$$

$$\text{Opgave 12: } 62 - 48 = 64 - 50 = 14$$

Groep Hoog

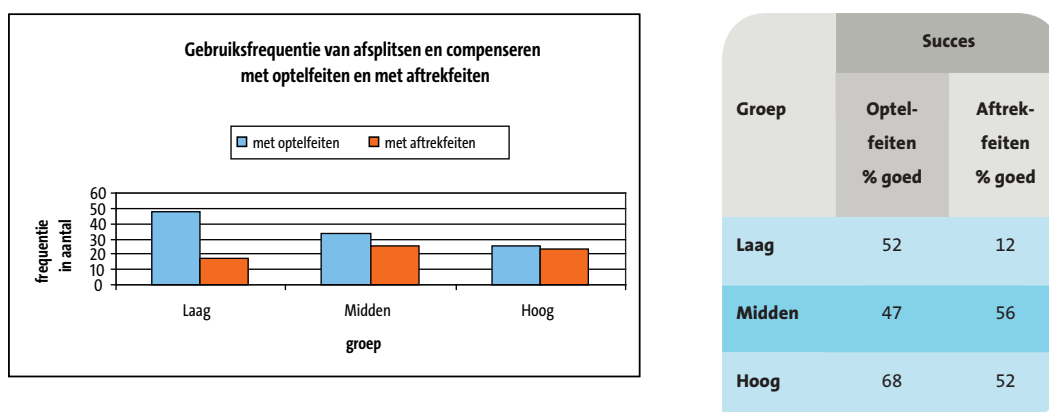
Leerlingen uit de groep Hoog leiden in ongeveer de helft van de oplossingen het onbekende getal uit optel- of aftrekfeiten af. Dit leidt in 6 op de 10 oplossingen tot een juist antwoord, een matige prestatie.

Als ze beide getallen transformeren, voeren ze de redenering en de berekeningen meestal correct uit (93% goed). Ze gebruiken ook het correcte optelfeet, als ze de aftrekking tot een optelling herleiden.

Het geheel overziende moeten we vaststellen dat leerlingen uit jaargroep 5 structurele problemen ondervinden, als ze een aftrekprobleem of een kale aftrekking redenerend proberen op te lossen. Een groot aantal leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog begrijpen onvoldoende de verschillende vormen van afsplitsen en compenseren die ze moeten beheersen om foutloos te kunnen redeneren. Leerlingen uit de groep Laag maken ook fouten als ze de aftrekking van de opgave in een andere aftrekking met hetzelfde verschil transformeren.

Omdat de geobserveerde leerlingen zo vaak fouten maken, als ze afsplitsen en compenseren, is nagegaan of het uitmaakt of ze met optelrelaties of aftrekrelaties redeneren. Het antwoord is bevestigend, zoals blijkt uit de in figuur 11.5 afgebeelde resultaten van deze vergelijking.

Figuur 11.5 Gebruiksfrequentie en resultaten van afsplitsen en compenseren in combinatie met optellen en aftrekken



- Leerlingen uit de groep Laag redeneren in driekwart van de afleidoplossingen op basis van de relatie tussen optelfeiten.
Leerlingen uit de groep Midden redeneren met optelrelaties in 6 op de 11 afleidoplossingen (52% tegen 48%).
- Leerlingen uit de laagste vaardigheidsgroep bereiken heel slechte resultaten bij redeneren met aftrekfeiten (15 van de 17 fout tegen 23 van de 48 fout bij redeneren met optelfeiten). Redeneren op basis van aftrekrelaties wordt ook in de groep Hoog zeer matig beheerst: 11 van de 23 fout bij aftrekken tegen 8 van de 25 fout bij optellen.
In de groep Midden doet de strategie er niet toe.

De slotconclusie van dit onderzoek is drieledig:

- leerlingen uit jaargroep 5 maken vooral gebruik van afsplitsen en compenseren, als ze de optelling niet kennen die bij de aftrekopgave past;
- ze gebruiken soms optelfeiten en soms aftrekfeiten;
- ze vergissen zich vrij vaak, vooral als ze op basis van aftrekrelaties redeneren.

11.4 Formalisering en niveaus van redeneren

Onderzoeksvragen

- 1 Is het mogelijk om, op basis van de geobserveerde oplossingen, de weg te schetsen waarlangs leerlingen hun oorspronkelijke redeneringen stapsgewijs formaliseren?
- 2 Zo ja, op welk niveau redeneren leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog op dit moment?

Onderzochte formalisering

Hoe leerlingen de meest informele vormen van redeneren formaliseren is niet systematisch onderzocht. In de Amerikaanse onderzoeksstroming naar de ontwikkeling van rekenstrategieën en -procedures wordt afleiden als de meest formele vorm van optellen en aftrekken beschouwd (Fuson e.a., 1996). Het wordt hier in Nederland beschouwd als een flexibele vorm van optellen en aftrekken ('handig' rekenen dat later *variarekenen* is genoemd) die leerlingen in jaargroep 3 ontwikkelen en leren gebruiken om de optellingen en aftrekkingen onder de 20 te reconstrueren en te automatiseren (Treffers e.a., 1987; Groenewegen en Gravemeijer, 1988; Van Eerde e.a., 1996; Tal-team, 1999; Menne, 2001). Menne (2001) veronderstelt dat leerlingen dit variarekenen verder kunnen ontwikkelen naarmate ze 'meer in staat zijn de formele eigenschappen van de basisoperaties toe te passen'. Het rijgend oplossen en symboliseren van oplossingen met sprongen op de getallenlijn oriënteert de leerling in de relaties tussen optellingen en aftrekkingen. Leerlingen komen op deze manier op het spoor van abstracte eigenschappen die achter hun eigen rekenhandelingen schuilgaan: eerst 'verwisselen' en 'groeperen', vervolgens 'aanvullen' als de tegenhanger van 'aftrekken' en het fenomeen van de 'gelijk blijvende som' en het 'gelijkblijvend verschil'. Ze leren dan, hoe langer hoe meer, puur getalsmatig te redeneren.

Deze beschrijving van de formalisering is te globaal om hiermee de geobserveerde oplossingen te kunnen ordenen. Daarom is de analysemethode toegepast die gebruikt is om de formalisering van rijgen (hoofdstuk 7) en splitsen (hoofdstuk 9) te reconstrueren. We lichten deze analyse-methode kort toe, alvorens het proces en de geconstrueerde sequentie te presenteren.

Analyse

We nemen aan (1) dat het geobserveerde scala van redeneeroplossingen de differentiatie weerspiegelt die ontstaat, als leerlingen redenerend leren aftrekken en (2) dat deze typen redeneeroplossingen verschillende niveaus van redeneren zichtbaar maken.

De hiërarchische ordening van de geïdentificeerde vormen van redeneren schetst dan de weg die basisschoolleerlingen volgen om de oorspronkelijke informele vorm van redeneren, stapsgewijs, tot de meest abstracte en compacte vorm van redeneren te transformeren.

De sequentie van deze stapsgewijze transformaties is in vier fasen geconstrueerd:

- (1) Eerst zijn de verschillende typen redeneeroplossingen per opgave geïnventariseerd om een overzicht te krijgen van het repertoire aan redeneringen die leerlingen toepassen.
- (2) Uit deze verzameling zijn vervolgens redeneeroplossingen geselecteerd die zichtbaar maken hoe leerlingen redenerend aftrekken en die aanwijzingen geven over de kennis en inzichten waarop de gebruikte redeneringen zijn gebaseerd (niveaus van redeneren).
- (3) Vervolgens zijn de onderscheiden vormen van redeneren hiërarchisch met elkaar in verband gebracht door te expliciteren welke leerervaring de leerling in staat stelt om een lagere vorm van redeneren tot die van het eerstvolgende niveau te transformeren (condities voor niveauverhoging).
- (4) Ten slotte is de geconstrueerde sequentie geïntegreerd met de formalisering van het rijgen (hoofdstuk 7) en het splitsen (hoofdstuk 9) op grond van theoretische én geobserveerde dwarsverbindingen.

Resultaten

Niveaus van redeneren

In het hele bestand van 228 oplossingen van het type *redeneren* zijn drie niveaus van redenerend hoofdrekenen geïdentificeerd die zichtbaar maken op welke manier leerlingen het onberekende gegeven van een aftreksituatie al beredenerend bepalen. We duiden deze niveaus aan met de

termen ‘construerend’, ‘structurerend’ en ‘getalsmatig’.

- Op het startniveau lost de leerling de aftrekopgave op door de bijbehorende optelling met optelfeiten samen te stellen (niveau a: construerend).
- Op het tussenniveau vindt de leerling het onbekende getal via het afsplitsen van de aftrekking van de opgave of via (het afsplitsen van) de optelling die bij deze aftrekking hoort (niveau b: structurerend).
- Op het derde en hoogste niveau van redenerend aftrekken ‘transformeert’ de leerling de onbekende aftrekking van de opgave in een andere gemakkelijk uit te rekenen aftrekking met hetzelfde verschil (niveau c: transformerend).

We presenteren deze niveaus achtereenvolgens aan de hand van herkenbare oplossingen die in de groepen laag, Midden en/of Hoog zijn geobserveerd.

– *Construerend*

Niveau a: samenstellen met optelfeiten

De analyse van de oplossingen waarin de leerlingen ‘afsplitsen en compenseren’ met ‘optellen’ combineert, bracht de meest informele vorm van redeneren aan het licht. Twee kenmerken maken dit informele niveau van redenerend hoofdrekenen herkenbaar:

- De leerling zet de aftrekking van de opgave om in een equivalente optelling (de zogenoemde ‘equivalente optelling’):
Opgave 3: $25 + ? = 50$ die bij $50 - 25 = ?$ hoort
- Hij reconstrueert deze optelling die hij *niet* kent met behulp van twee of meer optelfeiten:
 $25 + ? = 50$ via $20 + 20 = 40$; $5 + 5 = 10$; samen genomen: $20 + 5 = 25$

Figuur 11.6 Voorbeelden van decimaal samenstellen

Type aftreksituaties	Optellend redeneren op basis van optelfeiten	
	Correct	Foutief
Aanvullen	Opgave 1: $12 + ? = 25$ $10 + 10 = 20$; $2 + 2 = 4$; 24, nog 1 erbij, dus $12 + 13 = 25$	Opgave 1: $12 + ? = 25$ $10 + 10 = 20$; $10 + 2 = 12$; $3 + 2 = 5$; $10 + 2 = 12 + 3 = 15$ $10 + 2 = 12 + 3 = 15 \rightarrow 15$ is het antwoord
Verschil bepalen	Opgave 6: $24 + ? = 40$ 20! Neel! $4 + 6 = 10$, $10 + 20 = 30$, $30 + 10 = 40$, dus 16 euro	Opgave 6: $24 + ? = 40$ 26! Je weet dat $2 + 2 = 4$, en $20 + 20 = 40$ dan doe je 20 eraf en dan 6.
Part bepalen	Opgave 3: $25 + ? = 50$ Opgeschreven in boekje: $20 + 20 = 40$; $5 + 5 = 10$ $20 + 5 = 25$ Opgave 9: $48 + ? = 100$ 62 cm erbij is 100 cm. Ik heb al 48 cm, $40 + 60 = 100$. Bij de 8 nog 2 is 62. Het moet 52 zijn: $40 + 50 = 90$	Opgave 3: $25 + ? = 50$ Schrijft 25 in boekje. Zegt: $2 + 3 = 5$, $5 + 5 = 10$ Schrijft dan 35. Zegt dat hij 25 en 35 heeft opgeteld. Het antwoord wordt 35. Opgave 9: $48 + ? = 100$ In boekje opgeschreven: $8 + 2 = 10$; $40 + 60 = 100$; 62
Kaal aftrekken	Opgave 10: $86 + ? = 100$ 86 erbij 14 is 100; $80 + 10$ en $6 + 4$ is samen 100	Opgave 10: $86 + ? = 100$ $6 + 4 = 10$; $80 + 20 = 100$; $20 + 4 = 24$, 24!

We duiden dit niveau van redeneren met de term ‘construerend’ aan, omdat deze manier van redeneren het beeld oproept van een kind dat een afbeelding met puzzelstukken namaakt. De leerling construeert ‘decimaal’ dat wil zeggen, wetend dat $12 = 10 + 2$ en dat je bij optellen, de termen kunt verwisselen en samennemen (commutatieve en associatieve eigenschap van optellen).

De correcte oplossing van opgave 3 zoals beschreven in figuur 11.6 illustreert haarscherp deze informele vorm van redenerend aftrekken die, uitgebeeld in sommentaal, als volgt verloopt:

- $25 = 20 + 5$ (10-opbouw)
- $40 = 20 + 20 \leftrightarrow 20 + 20 = 40$ (splitsing van 40 volgens de dubbelstructuur)
- $10 = 5 + 5 \leftrightarrow 5 + 5 = 10$ (splitsing van 10 volgens de dubbelstructuur)
- $50 = 40 + 10 \leftrightarrow 40 + 10 = 50$ (splitsing van 50 analoog met $5 = 4 + 1$)
- $(20 + 20) + (5 + 5) = 50 \rightarrow$ associatieve eigenschap van optellen
- $(20 + 5) + (20 + 5) = 50 \rightarrow$ commutatieve eigenschap van optellen

De oplossingen maken zichtbaar wat leerlingen, die op dit niveau redeneren, weten en gebruiken:

- Wat de getallen betreft:
 - een getal als 12 kan worden opgevat als $10 + 2$, een getal als 25 als $20 + 5$;
 - 12 en 25 kunnen op verschillende manieren worden ‘gemaakt’ (samengesteld) en ‘afgebroken’ (afgesplitst);
 - je kunt hiervoor de *dubbelstructuur* gebruiken, de *vijfstructuur* of de splitsingen van 10 en 100;
 - gebruikmaken van parate kennis van de ‘dubbelen’ ($2 + 2 = 4$, $3 + 3 = 6$, $4 + 4 = 8$ en $5 + 5 = 10$);
 - de splitsingen van 10 ($1 + 9$, $8 + 2$, $7 + 3$, etc.) en optelfeiten tot 10 die samenhangen met de vijfstructuur van de getallen (bijvoorbeeld $5 + 3 = 8$).
- Wat optellen betreft:
 - $20 + 20$, $40 + 60$ en $50 + 30$ is analoog aan $2 + 2 = 4$, $4 + 6$ en $5 + 3$;
 - een som blijft hetzelfde als de getallen worden verwisseld (optellen is commutatief) of samengenomen (optellen is associatief).

– Structurend

Op het volgende niveau passen leerlingen twee vormen van redenerend hoofdrekenen toe: ze vinden het onbekende getal van de aftrekopgave via een afsplitsing van de aftrekking (of van de equivalentte optelling) van de opgave (afleiden) of via het passende optelfeitel (herleiden).

Niveau b

Afleiden via afsplitsen en compenseren

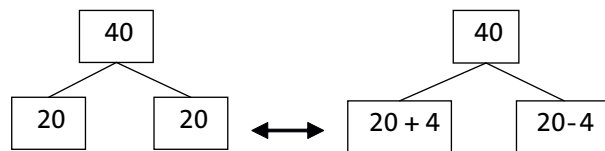
Afleiden is de meest gebruikte vorm van redeneren. Het werd in 172 van de 228 redeneeroplossingen toegepast (79%). De voorbeeldoplossingen in figuur 11.8 tonen de twee tegenovergestelde vormen van afleiden en compenseren die leerlingen uit jaargroep 5 in aftreksituaties toepassen:

- *afsplitsen en compenseren* met behulp van *optelfeiten* (optelstrategie) en
- *afsplitsen en compenseren* met behulp van *aftrekfeiten*.

De foutieve oplossingen tonen aan dat leerlingen in de war raken bij compenseren, omdat ze, bij elk type reksituatie, een andere compensatieregels moeten toepassen (zie figuur 11.7).

Leerlingen die het probleem van de bloezen met $24 + ? = 40$ schematiseren en via $20 + 20 = 40$ oplossen, begrijpen dat het verschil dat ontstaat door 4 van 24 af te trekken moet worden gecompenseerd door 4 ook van de tweede term van $20 + 20$ af te trekken: Het wordt $20 + (20 - 4) = 16$. Onderstaande algebraïsche weergave van deze redenering laat zien hoe complex dergelijke afleidingen eigenlijk zijn en de mondelinge uitleg van de geobserveerde leerling toont hoe ‘compact’ en cryptisch leerlingen op dit niveau wiskundig redeneren.

Opgave 6: $24 + ? = 40$ via $20 + 20 = 40$



Figuur 11.7 Geobserveerde voorbeelden van afleiden met behulp van optelfeiten en aftrekfeiten

Type situaties	Afleiden	
	Met optelfeiten (optellen)	Met aftrekfeiten (aftrekken)
Aanvullen	Opgave 1: $12 + \dots = 25$ via $12 + 12 = 24$ $12 + 12 = 24$. Dan maak ik er 13 van, is 25	Opgave 8: $50 - ? = 32$ via $50 - 20 = 30$ $50 - 20 = 30$; 2 teveel, 2 van de 20 af is 18
Verskil bepalen	Opgave 6: $24 + ? = 40$ via $24 + 20 = 44$ $20 + 20 = 40$; $24 + 20 = 44$. Er zijn er 4 teveel. - Die moeten weer af: $20 - 4 = 16$ - Als het 20 was, was het 20. - Maar nu is het 16, - want de 4 komt er ook bij	Opgave 6: $40 - 24$ via $40 - 20 = 20$ - Foutief: $40 - 20 = 20$ - Dan is $40 - 24$ evenveel als $40 - 20$ en 4 erbij, 24 $40 - 20 = 20$ 20 is 4 minder dan 24, - dan gaat 4 van 20 af, is 16 - Foutief: $40 - 20 = 20$; die 4 er weer bij is 4
Part bepalen	Opgave 9: $48 + ? = 100$ via $40 + 60 = 100$ - Een halve plank is 50 cm; dan is die 52 $40 + 60 = 100$, 48 is 8 minder dan 40 - Dan gaat 8 van de 60 af, is 52 - Foutief: $60 + 40 = 100$; de andere plank is dan 62	Opgave 9: $48 + ? = 100$ via $100 - 50 = 50$ $100 - 50 = 50$ 2 teveel eraf gehaald, - dan is het 52
Kaal aftrekken		Opgave 12: $62 - 48$ via $62 - 42$ $62 - 42 = 20$; nee! $62 - 42 = 20$; dan nog 6 eraf, dat is 14.
		Opgave 11: $102 - 90$ via $100 - 90$ $100 - 90 = 10$; Het was 10. Dan is het 2 meer, 12
		Opgave 4: $60 - 35$ (foutief) $60 - 30 = 30$. Ik doe de 5 er weer bij: 35

Figuur 11.8 Compensatieregels die leerlingen bij afleiden moeten toepassen

	Aanpak	Compensatie regel
Afleiden m.b.v. aftrekken (aftrekstrategie)	Afronden van het getal dat afgetrokken wordt	Wat je te veel hebt afgetrokken, moet je verrekenen door evenveel bij de rest op te tellen: Opgave 6: $100 - 48$ via $100 - 50 = 50$ 48 is 2 minder dan 50, dan twee meer over, is 52
	Afronden van het getal waarvan iets wordt afgetrokken	Wat je van het aftrektal hebt afgetrokken om er een rond getal van te maken, moet je bij de uitkomst optellen: Opgave 11: $102 - 90$ via $100 - 90 = 10$ 100 is 2 minder dan 102, dan is het niet 10, maar 12
Afleiden m.b.v. optellen (optelstrategie)	Naar beneden afronden van het startgetal	Wat je, bij aanvullen, van de kleinste term hebt afgehaald, moet je van het verschil aftrekken: Opgave 6: $24 + ? = 40$ via $20 + 20 = 40$ 20 is 4 minder dan 24, 4 moet dan van 20 af, is 16 Opgave 9: $48 + ? = 100$ via $40 + 60 = 100$ 40 is 8 minder dan 48, dan gaat 8 van de 60 af, is 52
	Naar boven afronden van het startgetal	Wat je, bij aanvullen, aan de kleinste term hebt opgeteld, moet je bij het verschil optellen: Opgave 9: $48 + ? = 100$ via $50 + 50 = 100$ 48 is 2 minder dan 50, dan is 52 en niet 50

Geobserveerde herleiding

Als het 20 was, was het 20. Maar nu is het 16, want de 4 komt er ook bij.

Algebraïsche herleiding

$$20 + 20 = 40$$

$$20 + 20 + 4 - 4 = 40 \text{ (} -4 \text{ als het symmetrische van } +4 \text{)}$$

$$20 + 4 + 20 - 4 = 40 \text{ (commutatieve eigenschap van optellen)}$$

$$(20 + 4) + (20 - 4) = 40 \text{ (associatieve eigenschap van optellen)}$$

$$24 + 16 = 40$$

Niveau b

Herleiden tot een optelling

Het zijn vooral de leerlingen uit de groep Laag die de aftrekking van de opgave tot een bekende optelling hebben herleid, omdat de getallen van hun aftrekopgaven zich daar meer voor lenen dan de getallen die de leerlingen uit de groepen Midden en Hoog moesten bewerken.

Ze herkennen in de meeste gevallen:

- een klein verschil, bijvoorbeeld 4, bij opgave 2;
- een ‘dubbel’, bijvoorbeeld $25 + 25 = 50$, bij opgave 3;
- een ‘bijna’ dubbel, bijvoorbeeld $12 + 13 = 25$, bij opgave 1;
- een verschil van bijna 10, bijvoorbeeld $90 + 12 = 102$;
- een splitsing van 100, bijvoorbeeld $100 = 48 + 52$, bij opgave 9.

– *Getalsmatig*

In de resterende en meest formele oplossingen hebben de leerlingen beide getallen van de aftrekking veranderd. Onderstaande voorbeelden maken de formele relaties en rekenregels zichtbaar die leerlingen op dit niveau gebruiken.

Geobserveerde voorbeelden van puur getalsmatig redeneren (transformeren)

Opgave 5: $36 - 25$

$30 - 20 = 10$ en hier is het 36 en 25, dan moet er nog 1 bij dan heb je 11 (bedoelt dat hij $36 - 25$ via $30 - 20$ en $6 - 5$ uitrekent).

Opgave 12: $62 - 48$

Als ik -2 doe, dan hoeft ik nog maar -46 (bedoelt dat $62 - 48$ is evenveel als $60 - 46$).

$60 - 46$ is $54 - 40$, is 14

Opgave 14: $620 - 370$

$600 - 300 = 300$; 50 eraf is 250, want ik had $600 - 300$ gedaan, maar ik moest eigenlijk $620 - 370$ doen, dus dan moet er nog eraf 50 (bedoelt dat hij $620 - 370$ via $600 - 350$ uitrekent).

Niveau c: transformerend

We herkennen deze oplossingen aan drie kenmerken:

- de leerling abstraheert een aftrekking uit de context;
- beschouwt deze aftrekking als uitdrukking van het verschil tussen twee getallen;
- en verlaagt beide getallen met evenveel, om dit verschil ‘op het oog’ te kunnen bepalen.

Leerlingen die dit niveau hebben bereikt, redeneren ‘puur getalsmatig’ in die zin dat ze de context en het probleem buiten beschouwing laten en alleen denken aan hoe ze de getallen zodanig kunnen transformeren dat het ‘verschil’ gelijk blijft (‘onveranderlijk’ aspect van de aftrekking).

Het kort en krachtig transformeren van een aftrekking in een andere aftrekking met hetzelfde verschil is de tegenpool van construeren met optelfeiten. Leerlingen bereiken dit niveau door uit te zoeken of het ook mogelijk is om, zonder hulpsommen en dus zonder compensatie, een optelling of aftrekking gemakkelijk te maken. Dit verlegt de aandacht van de relatie tussen de getallen van de opgaven met een bekend feit naar de relatie tussen optellingen en aftrekking die ‘gelijk’ zijn aan die van de opgave:

Van: $62 - 48$ via $62 - 50$ en 2 erbij

Naar: $62 - 48$ is evenveel als $63 - 49$, $64 - 50$

We lichten hieronder deze twee opeenvolgende niveauverhogingen toe, aan de hand van het schema van figuur 11.9.

Niveauverhogingen

De geleidelijke formalisering van redenerend aftrekken laat zich, op basis van de geobserveerde oplossingen en de beschikbare theorie, als volgt schetsen.

Op het startniveau weet de leerling dat elk geheel getal (behalve 1) de som is van twee andere getallen. Op basis van deze kennis heeft hij, in de loop van jaargroep 3 en 4, alle feiten tot 10 en 20 gereconstrueerd via het systematisch afsplitsen van getallen, handig gebruikmakend van de structureren van getallen en redeneringen van het type één meer – één minder’ en/of ‘een minder – één meer’:

$6 + 7$ via $6 + 6 = 12$

7 is één meer dan 6, dan is het 13, één meer dan 12

Figuur 11.9 Twee niveauverhogingen bij de formalisering van redeneren

NIVEAU III – Systeemgebonden, met behulp van rekeneigenschappen			
c	Getalsmatig	Transformeren met behoud van het verschil	$62 - 48$ via $64 - 50$ $62 + 2 = 64$ en $48 + 2 = 50$, dan wordt het $64 - 50 = 14$ (60 eraf 50 en 4 erbij)
NIVEAU II – Contextgebonden, op basis van getalrelaties			
b	Structurerend	Herleiden tot de equivalente optelling	$62 - 48$ via $48 + 12$ 14 want $48 + 12 = 62$
		Afleiden via afsplitsen en compenseren	$62 - 48$ via $62 - 50$ $62 - 50 = 12$ en 2 erbij dus 14
a	Construerend	Samenstellen met optelfeiten	$25 + ? = 50$ via $20 + 20 = 40$; $5 + 5 = 10$; $20 + 5 = 25$
Niveaus		Rekenprocedures en vormen van redeneren	Voorbeeldberekeningen

$$8 + 9 \text{ via } 8 + 10 = 18$$

9 is één minder dan 10, dan is het 17, één minder dan 18

De oplossingen van de leerlingen uit de groep Laag suggereren dat leerlingen ‘construerend aftrekken’ in de overgangsfase van rekenen onder de 20 naar rekenen onder de 100, omdat hun begrip van getallen > 100 en van de relatie tussen aftrekkingen nog ontoereikend is om te weten hoe ze in dit getalgebied kunnen afsplitsen en compenseren. Ze hebben een overbruggingsfase nodig om de kennis en vaardigheden op te doen die deze generalisering mogelijk maakt. Op basis van hun kennis van de 10-structuur van de getallen, elementaire optelfeiten, hun begrip van samenstellen en van de optelregels ‘verwisselen’ en ‘groeperen’ zijn ze wel in staat om optellingen, die ze nog niet kennen, handig samen te stellen.

1^e niveauverhoging: van samenstellen naar afleiden

Optellingen met twee termen die bijna een dubbel opleveren ($12 + 13$; $20 + 21$, $48 + 50$ en $24 + 25$) en optellingen met een term die bijna evenveel is als een veelvoud van 10 ($19 + 20$ en $41 + 20$) functioneren als springplank voor de overgang van reconstrueren naar afleiden. In de aanloophase reconstrueren de leerlingen de optelrelaties die ze als ‘hulpsommen’ zullen gebruiken, bijvoorbeeld $12 + 12 = 24$, $20 + 20 = 40$, $130 + 30 = 60$, $60 = 40 + 20$ en $100 = 80 + 20$.

Als de leerlingen eenmaal zover zijn, ligt afleiden binnen handbereik:

$$12 + 13 \text{ via } 12 + 12 = 24 \rightarrow 13 \text{ is één meer dan } 12, \text{ dan is het één meer dan } 24, 25.$$

$$24 + 25 \text{ via } 25 + 25 = 50 \rightarrow 24 \text{ is één minder dan } 25, \text{ dan is het één meer dan } 25, 26.$$

$$19 + 20 \text{ via } 20 + 20 = 40 \rightarrow 19 \text{ is één minder dan } 20, \text{ dan is het één meer dan } 40, 41.$$

$$41 + 20 \text{ via } 40 + 20 = 60 \rightarrow 41 \text{ is één meer dan } 40, \text{ dan is het één meer dan } 60, 61.$$

Deze ervaring én het toenemende inzicht in de relatie tussen optellen, aanvullend optellen en aftrekken motiveert de leerlingen om op een vergelijkbare manier onbekende aftrekkingen

redenerend op te lossen, gebruikmakend van de bekende aftrekking die achter die van de opgave schuilgaat:

$40 - 19$ via $40 - 20 = 20 \rightarrow$ één minder dan 20, dan één meer dan 20, is 21.

$60 - 31$ via $60 - 30 = 30 \rightarrow$ één meer dan 30, dan één minder dan 30, is 29.

$80 - 42$ via $80 - 40 = 40 \rightarrow$ twee meer dan 40, dan twee minder dan 40, is 38.

Leerlingen krijgen pas greep op de compensatieregels, als ze de effecten van het veranderen van een term of de twee termen van optellingen en aftrekkingen systematisch gaan onderzoeken:

Van $20 + 20$ naar $19 + 20 \rightarrow$ één minder, dus uitkomst ook één minder.

Van $20 + 20$ naar $20 + 21 \rightarrow$ één meer, dus uitkomst ook één meer.

Van $20 + 20$ naar $19 + 19$ en dergelijke.

Naarmate leerlingen meer optelfeiten hebben gememoriseerd, neemt de kans toe dat ze gaan herleiden. Dit blijkt uit het veelvuldige gebruik van $12 + 13 = 25$, $18 + 4 = 22$ en $25 + 25 = 50$ in de groep Laag en van $48 + 52 = 100$ in de groepen Midden en Hoog om $25 - 12$, $22 - 18$, $50 - 25$ en $100 - 48$ op te lossen.

2^e niveauverhoging: van afleiden en herleiden naar transformeren

Het fundamentele verschil tussen afleiden en transformeren is dat de getallen waarmee de leerling opereert niet meer naar hoeveelheden of grootheden verwijzen. Het zijn 'rekendingen' geworden die hij volgens strikte regels gebruikt.

De overstap van afleiden naar transformeren is daarom een grote sprong vooruit. Leerlingen maken deze sprong door na te denken over de overeenkomsten en verschillen tussen de verschillende manieren van afsplitsen en compenseren, puur getalsmatig, lettend op de condities waaronder een 'som' (c.q. een 'verschil') gelijk blijft.

Concluderend kan worden gesteld dat de geobserveerde oplossingswijzen slechts globale aanwijzingen geven over de wijze waarop leerlingen het redenerend hoofdrekken formaliseren. Er tekent zich echter een lijn af waarlangs leerlingen eerst in het getalgebied het fundament voor redeneren leggen, vervolgens met geheugenfeiten puzzelen alvorens te leren systematisch af te leiden en te transformeren.

Integratie met rijgen en splitsen

In de laatste constructiefase zijn de drie onderscheiden fasen van de formalisering van redenerend aftrekken geïntegreerd met de sequentie van de formalisering van rijgen en splitsen die in hoofdstuk 10 is gepresenteerd. Het schema van figuur 11.11 pagina 202 is het resultaat van deze integratie die we kort toelichten.

- Het samenstellen van optellingen en aftrekkingen met behulp van optelfeiten doet een beroep op kennis en vaardigheden die leerlingen ook nodig hebben om op niveau 5 te kunnen rijgen en splitsen. Ze moeten onder andere elk willekeurig getal tot 100 in zoveel groepen van tien en zoveel losse eenheden kunnen splitsen. Ze moeten ook begrijpen hoe ze de decimale structuur van de getallen kunnen gebruiken om bijvoorbeeld 50 met eenheden van 20 en 5, via $20 + 20 = 40$ en $5 + 5 = 10$ samen te stellen. Daarom brengen we samenstellen met rekenfeiten in relatie met de mengvorm splitsen-rijgen enerzijds en springen naar een tienvoud anderzijds.
- Leerlingen leren pas afsplitsen en compenseren met getallen boven de 100, als ze deze getallen als samengestelde hoeveelheden beschouwen en op basis van deze kennis met tienvouden optellen en aftrekken, naar analogie van optellen en aftrekken met eenheden:

62 als $(6 \times 10) + (2 \times 1)$ en 48 als $(4 \times 10) + (8 \times 1)$

$62 - 40 = 22$, denkend aan $60 - 40 = 20$

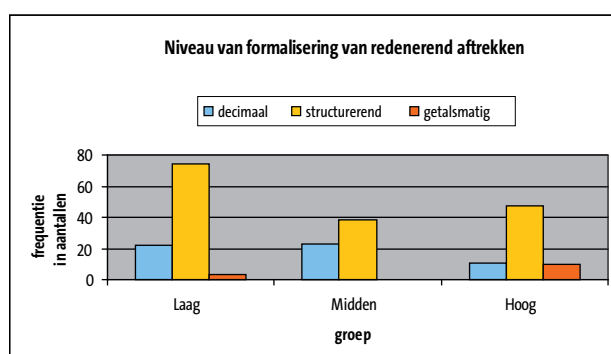
Daarom behoort deze vorm van redeneren tot niveau 6, het niveau waarop leerlingen op basis van deze getalstructuren rijen en splitsen.

- Leerlingen laten zich bij construerend en structurerend redeneren nog sterk leiden door de context. Om die reden behoren deze vormen van redeneren tot het tweede denkniveau. Op het hoogste niveau abstraheren ze een aftrekking uit de opgave en transformeren ze deze aftrekking puur getalsmatig op basis van het verworven inzicht in het concept ‘gelijkblijvend verschil’. Daarom behoort deze vorm van redeneren tot niveau 8.

Niveau waarop de groepen Laag, Midden en Hoog redeneren

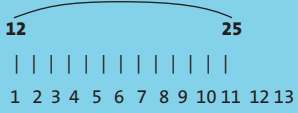
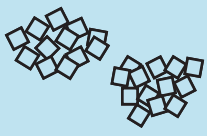
Alle 228 geobserveerde redeneeroplossingen zijn uiteindelijk in drie niveaucategorieën gecodeerd en gesorteerd (‘decimaal’, ‘structurerend’ en ‘getalsmatig’) om het niveau vast te stellen waarop leerlingen redeneren en het succes dat ze op dit niveau behalen. De resultaten zijn weergegeven in de staafgrafiek en de tabel van figuur 11.10.

Figuur 11.10 Aantal redeneeroplossingen per niveau van formalisering in de groep Laag, Midden en Hoog en het bereikte succes



Groep	Succes		
	Decimaal aantal goed	Structurerend aantal goed	Getalsmatig aantal goed
Laag	10 v/d 22 (45%)	47 v/d 74 (64%)	2 v/d 3
Midden	13 v/d 23 (57%)	19 v/d 38 (50%)	n.v.t.
Hoog	6 v/d 11 (55%)	33 v/d 47 (70%)	9 v/d 10

Figuur 11.11 Sequentie van de formalisering van rijgen, splitsen en redeneren

NIVEAU III – Systeemgebonden, met behulp van rekeneigenschappen			
8 REKENKUNDIG	Gestandaardiseerd 62 – 48 = ? via 62 – 40 = 22 22 – 8 = 14	Algoritmisch 62 – 48 = ? via 5 10 6 2 $\begin{array}{r} 48 - \\ 14 \end{array}$	Getalsmatig via transformeren 62 – 48 is evenveel als 64 – 50, dus 14
NIVEAU II – Contextgebonden, op basis van getalrelaties			
7 SEMIPOSITIONEEL		Achteraf lenend 62 – 48 = ? via 60 – 40 = 20 10 + 2 = 12 → 12 – 8 = 4; 10 + 4 = 14 Kolomsgewijs: 62 – 48 = ? via $\begin{array}{r l} 60 & 2 \\ 40 & 8 \\ 20 & -6 \end{array}$ 60 – 40 = 20 20 – 6 = 14	
6 KARDINAAL	Aftrekkend met tienvouden • 62 – 48 via 62 – 40 = 22 22 – 8 = 20 – 6 = <u>14</u>	Met tekorten 62 – 48 = ? via 60 – 40 = 20 2 – 8 → 6 tekort 20 – 6 = 14	Structurerend via herleiden • 62 – 48 = 14 want 48 + 14 = 62 Structurerend via afleiden (afsplitsen en compenseren) • 62 – 50 = 12; 48 is 2 minder dan 50, dan is het 2 meer, 14
5 LINEAIR-DECIMAAL	Startend met een 10-sprong • 62 – 48 via (62) → 52, 42, 32, 22 22 – 8 via 22 – 2 = 20 en 20 – 6 = <u>14</u> • 48 + ? = 62 via 48 + 10 = 58 58 + 4 = 62; 10 + 4 = <u>14</u>		
4 LINEAIR-DECIMAAL	Springend naar een tienvoud • 62 – 48 = ? via 62 – 2 = 60 60 – 40 → 50, 40, 30, 20; 20 – 6 = <u>14</u> • 48 + ? = 62 via 48 + 2 = 50 50 + 10 = 60; 60 + 2 = 62; 10 + 2 + 2 = <u>14</u>		
3 ORDINAAL	Dubbel tellend 12 + ? = 25 via 12 → 13(1), 14(2), 15(3), 16(4), 17(5), 18(6), 19(7), 20(8), 21(9), 22(10), 23(11), 24(12), 25(13)		
2 SEMIORDINAAL	Verkort tellend met objecten 12 + ? = 25 via 		
NIVEAU I – Handelingsgebonden, met behulp van verzamelingen objecten			
1 FIGURATIEF	Drie keer tellend 12 + ? = 25 via 		
niveau	Niveaus en vormen van RIJGEN	Niveaus en vormen van SPLITSSEN	Niveaus en vormen van REDENEREN

Deze resultaten geven onderstaande aanwijzingen:

Groep Laag

Leerlingen uit de groep Laag redeneren incidenteel op het hoogste niveau, in slechts 3 van de 100 gevallen, waarvan er twee juist zijn. In driekwart van de oplossingen redeneren ze op niveau 7, even vaak via herleiden als via afleiden. In een kwart van de oplossingen reconstrueren ze de equivalente optelling met rekenfeiten (niveau 6). De resultaten met afleiden en herleiden zijn matig (64% goed), die met samenstellen onvoldoende (45% goed).

Groep Midden

Leerlingen uit de groep Midden redeneren in één op de drie oplossingen op het laagste niveau en in twee op de drie oplossingen op niveau 7, vrijwel uitsluitend via afleiden. De resultaten zijn op beide niveaus zeer matig, 57% goed met samenstellen en 50% goed met afleiden.

Groep Hoog

Leerlingen uit de groep Hoog passen in 70 van de oplossingen afleiden of herleiden toe, vrijwel altijd afleiden (niveau 7). In de ene helft van de resterende oplossingen redeneren ze op het laagste niveau (samenstellend, op niveau 6) en in de ander helft op het hoogste (getalsmatig, op niveau 8). Het aantal juiste uitkomsten neemt toe naarmate de leerling op een formeler niveau redeneert: van 55% goed op niveau 6, naar 70% op niveau 7 en 90% op niveau 8.

11.5 Structurele fouten

Onderzochte fouten

De resultaten die de leerlingen behalen, geven onderstaande aanwijzingen over de aard van de problemen bij afleiden:

- Leerlingen uit de groepen Laag en Hoog vinden (veel) vaker de juiste uitkomst via optelrelaties dan via aftrekrelaties.
- In alle drie de vaardigheidsgroepen wordt afsplitsen en compenseren met (zeer) matige resultaten toegepast (50% en 60% goede antwoorden).
- Het grootste aantal fouten wordt gemaakt, als leerlingen met behulp van aftrekrelaties afsplitsen en compenseren (15 op de 17 fout in de groep Laag en 13 op de 23 in de groep Hoog).

Op basis van deze indicaties zijn de foutieve oplossingswijzen van de opgaven van figuur 11.12 geselecteerd om de aard en de bron van de geobserveerde fouten te identificeren.

Figuur 11.12 Geanalyseerde foutieve redeneeroplossingen

Procedures	Voorbeeldopgaven
Samenstellen m.b.v. optelfeiten	1 (L en M); 9 (L, M, H) en 10 (M)
Afleiden m.b.t. optelfeiten	1 (L en M); 6 (L, M, H)
Afleiden m.b.t. aftrekfeiten	6 en 11 (L, M, H); 8 (M); 12 (M en H) en 16 (H)

Onderzoeksvraag

Welke structurele fouten maken de leerlingen bij afleiden?

Analyse

De volgende typen foutieve oplossingswijzen zijn geanalyseerd:

- samenstellen (opgaven 1, 9 en 10);
- afleiden m.b.v. optelfeiten (opgaven 1 en 6);
- afleiden m.b.v. aftrekfeiten (opgaven 6, 8, 11, 12 en 16).

We presenteren hieronder per vaardigheidsgroep en per vraag de resultaten van de analyse, vatten telkens de kern samen in concluderende opmerkingen en presenteren ten slotte deze bevindingen in de gebruikte foutenmatrijs.

Resultaten

Structurele fouten bij samenstellen met behulp van optelfeiten

Kenmerkende fouten worden in figuur 11.13 gepresenteerd. Deze fouten komen deels voort uit misconcepties, deels uit het feit dat de leerlingen geen rekentaal hebben ontwikkeld om hun redenering en handelingen overzichtelijk en eenduidig te symboliseren.

Begrip

Begrip van het samenstellen (c.q. de associatieve eigenschap van optellen)

Bij de deze vorm van afleiden worden twee optellingen ‘in elkaar geweven’. Twee typen fouten zijn bij deze handelingen geïdentificeerd:

- de leerling vergist zich bij het samengesteld optellen (oplossing a en b);
- de leerling gebruikt een inadequaat feit en raakt daarom in de war (oplossing c).

Figuur 11.13 Foutieve oplossingen bij construerend redeneren via samenstellen

Opgave 9: $48 + ? = 100$

(a) In boekje opgeschreven:

$8 + 2 = 10$; $40 + 60 = 100$; 62

Opgave 10: $86 + ? = 100$

(b) $6 + 4 = 10$; $80 + 20 = 100$; $20 + 4 = 24$, 24!

Opgave 1: $12 + ? = 25$

(c) $10 + 10 = 20$; $10 + 2 = 12$; $3 + 2 = 5$

$10 + 2 = 12 + 3 = 15$

$10 + 2 = 12 + 3 = 15 \rightarrow 15$ is het antwoord

Leerlingen die de splitsingen van 10 en 100 gebruiken, nemen eerst tientallen samen ($40 + 60 = 100$) en daarna de eenheden ($8 + 2 = 10$). Door deze volgorde, realiseren ze zich niet dat ze een tiental extra maken. Het antwoord is altijd 10 groter dan de correcte uitkomst. Het schoolvoorbeeld is de fout in oplossing (a) en (b) bij voorbeeldopgave 9 en 10.

In oplossing (c) raakt de leerling in de war, omdat hij, in de loop van het proces, een rekenfeit gebruikt dat ongeschikt is om de optelling samen te tellen.

Deze leerling gebruikt eerste op een correcte manier $10 + 10 = 20$ in combinatie met $10 + 2 = 12$ om $12 + 12$ te krijgen. De optelling $12 + 3 = 15$ zet hem op het verkeerde spoor en wordt wellicht

uitgelokt door de 'vijf' van 25.

Dergelijke vergissingen hebben alles te maken met de complexiteit van de handelingen. Leerlingen verliezen het overzicht, omdat ze een geschikte taal missen.

Concluderend kan worden gesteld dat leerlingen zich gemakkelijk bij reconstruerend redeneren kunnen vergissen, omdat samengesteld optellen omslachtig is en ordelijk moet worden uitgevoerd. Dit gaat vaak mis, omdat de meeste leerlingen geen mondelinge noch schriftelijke rekentaal hebben geleerd om hun denk- en rekenstappen overzichtelijk te symboliseren.

Afsplitsen en compenseren met behulp van optelrelatie

In figuur 11.14 worden de kenmerkende fouten getoond die leerlingen bij afsplitsen en compenseren maken, als ze optelrelaties gebruiken. Alle fouten betreffen het begrip van afsplitsen en waarschijnlijk ook het gebrek aan overzicht. Dit laatste geldt zeer waarschijnlijk voor de eerste foutieve oplossing (d).

Begrip

Begrip van compenseren

Oplossingen (e) tot en met (g) van voorbeeldopgave 6 illustreren drie typen fouten die leerlingen kunnen maken na een juiste aanpak van de voorbeeldopgave, in dit geval het idee om dubbel 20 als hulpsom te gebruiken om het verschil tussen 24 en 40 te bepalen: $24 + ? = 40$. Leerlingen moeten begrijpen dat 4 van 20 afgaat, omdat 24 vier meer is dan 20. Een complexe redenering die tot de volgende mistappen kan leiden:

- de term van de gebruikte hulpsom wordt de uitkomst: de 20 van $20 + 20$;
- de eenheden van de bekende term worden als uitkomst beschouwd: de 4 van 24;
- het verschil met het tienvoud wordt de uitkomst: 6, want $4 + 6 = 10$.

Figuur 11.14 Foutieve oplossingen bij afsplitsen en compenseren met behulp van optelrelatie

Opgave 1: $12 + ? = 25$

(d) Nog een keer 12: $12 + 12 = 25$

Nee! Telt door met de vingers en zegt: 24 dan nog 1 is 25. Eigenlijk kan ik er gelijk 13 bij doen!

Schrijft in boekje: $12 + 12 = 24 + 1$ en geeft 25 als antwoord.

Opgave 6: $24 + ? = 40$

(e) De een is 24, de ander is 40. $20 + 20 = 40$. Die andere is duurder, is 4 duurder, die andere is nog duurder, 20 duurder. Het antwoord is dan 20.

(f) $20 + 20 = 40$; $24 + 20 = 44$; 4 meer dan 40. Dus 4 euro goedkoper. Het antwoord is 4.

(g) Het is 26 euro goedkoper. $20 + 20 = 40$ plus $4 + 6 = 10$. Hier komt ze niet uit. Ze blijft wel bij het eerste gegeven antwoord: 26.

Afsplitsen en compenseren met behulp van aftrekrelaties

Leerlingen maken de meeste fouten, als ze op basis van aftrekrelaties afsplitsen. Wellicht komt dit, omdat ze worden 'verblind' door de aftrekking die ze 'achter' de aftrekking van de voorbeeldopgave zien, bijvoorbeeld $50 - 30 = 20$ achter $50 - 32$, $40 - 20$ achter $40 - 24$ en $100 - 90$ achter $102 - 90$.

Figuur 11.15 Foutieve oplossingen bij afsplitsen en compenseren met behulp van aftrekrelaties

Opgave 6: $40 - 24 =$	(h) Eerst 40 eraf 24; 40 eraf 20 is 20; 4 erbij is 24 of: $40 - 20 + 4 = 24$; dus 40 min 24 is 24. (i) 4 van die blouse weg: $40 - 20$ eraf. 6 vergeten is 26.
Opgave 8: $50 - 32 =$	(j) $50 - 30 = 20$, dan krijgt hij 22 euro terug.
Opgave 11: $102 - 90 =$	(k) $102 - 90$; $100 - 90 = 10$; $10 - 2 = 8$; 8! (l) Eerst 100 en dan eraf 90 dat is 10; ($100 - 90 = 10$). Dan hou je er nog 2 over en dat moet je 10 bijtellen en dat is dan 102. Dus, moet je eerst 10. Tien is dan het antwoord.
Opgave 16: $900 - 595 =$	(m) 595 dicht bij 600; $600 - 900 = 300 \rightarrow -5$ is 295

Leerlingen maken dan fouten die ze waarschijnlijk niet zouden maken, als zij de voorbeeldopgave rijgend zouden oplossen. Het schoolvoorbeeld daarvan is fout (h). Rijgend trekt de leerling 20 af (blijft over 20) en vervolgens 4 van 20 is 16. Fout (h) wordt structureel gemaakt, evenals fout (j) die rijgend nooit wordt gemaakt: eerst 20 eraf is 20, dan 2 eraf is 18. Voorbeeldopgave 11 wordt vrijwel door iedereen rijgend en correct opgelost. Fouten van het type (k) en (l) zijn dan ook andere typische gevallen van ‘verblind’ raken door een operatie die achter de operatie van de opgave schuilgaat.

Samenvattende conclusie

Het geheel overziende, kunnen we vaststellen dat leerlingen vermoedelijk onvoldoende met elkaar en met hun leraar hebben nagedacht over (1) hoe compenseren in verschillende optel- en aftreksituaties werkt, (2) welke compenseerregels ze kunnen formuleren op basis van de oplossingen die tijdens de lessen worden aangedragen en (3) hoe deze regels in willekeurige optel- en aftreksituaties kunnen worden toegepast, zowel in context als bij kaal aftrekken.

Figuur 11.16 Aard en bron van de fouten in de redeneeroplossingen

	Fout	Bron
Begrip van samenstellen en redeneren (c.q. van associatieve eigenschap van optellen)	- De twee gebruikte optelfeiten worden onjuist ‘in elkaar geweven’. - Een inadequaat optelfeet wordt gebruikt.	- Vertrouwdheid met structureren en samenstellen - Kennis van relevante getalstructuren en -relaties - Begrip van de associatieve eigenschap van optellen
Begrip van afsplitsen en compenseren met behulp van optel- en aftrekrelaties	De leerling geeft als antwoord - de term van de gebruikte hulpsom òf - de eenheden van de bekende term òf - het verschil met het tienvoud.	Begrip van - wat compenseren is - waarom je moet compenseren en - hoe compenseren werkt.

11.6 Aandachtspunten

Bovenstaande resultaten richten de aandacht op de twee kanten van redeneren:

- de ontwikkeling en formalisering van afsplitsen en compenseren;
- het adequaat gebruik van *redeneren* als vorm van hoofdrekenen.

Ontwikkeling, formalisering en automatisering van afsplitsen en compenseren

De geobserveerde afleidoplossingen tonen aan dat het niet goed gesteld is met redeneren halverwege de basisschool. Een eerste negatieve factor is dat de geobserveerde leerlingen vaak niet volgens de regels van het spel afleiden. De oorzaak daarvan is vermoedelijk dat veel leerlingen niet weten waar deze regels vandaan komen (aard) noch wat de ene regel met de andere te maken heeft (onderlinge samenhang).

In slechts 13 van de 189 geobserveerde afleidingen heeft de leerling het zich gemakkelijk gemaakt door dezelfde getallen bij de twee termen van de aftrekking op te tellen. Komt deze uitzonderlijk lage frequentie door de opgaven, een gebrek aan aandacht voor deze vorm van hoofdrekenen in de klas of een combinatie van beide? Of: ligt getalsmatig afleiden voorlopig buiten het bereik van het gros van de leerlingen? Dit zal nader moeten worden onderzocht.

Adequaat gebruik van redeneren als vorm van hoofdrekenen

Een tweede negatieve factor lijkt te zijn, dat leerlingen in contexten redeneren en vaak in combinatie met aanvullend optellen, terwijl onder die omstandigheden rijgen adequater is. De gemaakte fouten doen vermoeden dat weinig leerlingen beseffen dat het in hun eigen belang is om slechts bij uitzondering af te leiden: als ze een passend aftrekfeit kennen ($62 - 48$ via $62 - 50 + 2$), als ze de equivalente optelling van buiten kennen ($48 + 14 = 62$), of als ze op het oog kunnen zien welke gemakkelijke aftrekking dezelfde rest heeft.

Samenvattend kan worden geconcludeerd dat de condities waaronder leerlingen leren redeneren niet toereikend lijken te zijn om het doel van flexibel hoofdrekenen te kunnen realiseren.

Impressies van redeneren

Rekenstrategie		
Type aftrekkingen	Optellen	Aftrekken
Aanvullen	Opgave 1: $12 + ? = 25$; $12 + 12 = ?$ 13. $12 + 12 = 24$ dan maak ik er 13 van, is 25 (Laag) Opgave 8: $32 + ? = 50$ $8 + 2 \rightarrow 30 + 10 = 40$; $40 + 10 = 50$, dus 18 (Midden)	Opgave 5: $36 - 25 = ?$ $30 - 20 = 10$ en hier is het 36 en 25, dan moet er nog 1 bij dan heb je 11 (Laag) Opgave 8: $50 - ? = 32$ $50 - 20 = 30$ teveel eraf; dus 18 (Midden)
Verschil bepalen	Opgave 6: $24 + ? = 40$ Dit is 24 en dit is 40. Als het 20 was, was het 20. Maar nu is het 16, want de 4 komt er ook bij (Laag).	Opgave 6: $40 - 24 = ?$ - In boekje opgeschreven: $40 - 20 = 20 + 4 = 24$; $40 - 20 = 20$; $20 - 4 = 16$ (Laag) Opgave 13: $189 + ? = 250$ - Ik maak 189 even (1)90 dan weet ik dat $90 + 60 = 150$. 1 teveel erbij gedaan. Het wordt 61. (Hoog)
Part bepalen	Opgave 9: $48 + ? = 100$ 1 meter = 100 cm; bij 48, eerst 60 erbij gedaan en weer 2 vanaf gehaald dan kom ik op 52 (Laag) Opgave 3: $25 + ? = 50$ - Opgeschreven in boekje: $20 + 20 = 40$; $5 + 5 = 10$, dan is het 25 (Laag)	Opgave 9: $100 - 48 = ?$ $100 - 48 = 52$; $100 - 40 = 60$; $10 - 8 = 2$ (Midden) 52! Gewoon $100 - 40 = 60$ en dan 8 eraf (Midden) Opgave 3: $50 - 25 = ?$ - In boekje opgeschreven $50 - 25$; $50 - 20 = 30$; $30 - 5 = 25$ (Laag)
Kaal aftrekken	Opgave 10: $86 + ? = 100$ $80 + 10$ en $6 + 4$ is samen 100, dus 14 (Midden) - Ik zie 6 iets met 20. $6 + 4 = 10$. Het antwoord is 14 (Midden).	Opgave 12: $62 - 48 = ?$ 62 eraf 2 is 60; het is 60 eraf 46 (Hoog)

Over 'restoplossingen' bij aftrekken

12 De invloed van taal in aftrekopgaven minder groot dan verondersteld

12 De invloed van taal in aftrekopgaven minder groot dan verondersteld

217 van de 1882 geobserveerde aftrekoplossingen – ruim 11% – zijn in de categorie ‘rest’ terecht gekomen. De gebruiksfrequentie van deze oplossingswijzen en het aantal gemaakte fouten geven belangrijke informatie over de factoren die bij aftrekken een rol spelen. Het succes (c.q. falen) wordt vooral bepaald door de mate waarin de leerlingen inzichtelijk rijgen, splitsen en geheugenfeiten gebruiken. De kenmerken van de opgaven bepalen voor een belangrijk deel of leerlingen een aftreksituatie correct interpreteren en schematiseren, in de loop van het oplossingsproces vastlopen of (impliciet) om hulp vragen. Het taalgebruik in de opgave is één van die kenmerken. De taal in de opgaven speelt een rol, maar het verklaart bij lange na niet de structurele en meest voorkomende fouten die leerlingen bij aftrekken maken.

12.1 Inhoud

Zoals gezegd in hoofdstuk 1, heeft de tegenvallende opbrengst van de nieuwe aanpak van ‘aftrekken onder de honderd’ ons aangespoord om te onderzoeken hoe het komt dat zoveel leerlingen, halverwege de basisschool, zoveel fouten maakten bij het uitrekenen van de voorgelegde aftrekopgaven. Bij de derde rekenpeiling wezen de resultaten bij aftrekken onder de 100 uit, dat de aftrekcontexten die leraren in de klas gebruikten om inzichtelijk te leren hoofdrekenen een extraprobleem vormden (Noteboom e.a., 2000).

Onze analyse van de oplossingswijzen en gemaakte fouten geeft sterke aanwijzingen dat een combinatie van factoren de leerproblemen en structurele fouten van de leerlingen verklaren en niet het feit dat de toetsopgaven zo ‘talig’ zijn, zoals veel leraren (en sommige didactici en onderzoekers) veronderstellen. We onderbouwen deze bevinding in dit hoofdstuk op basis van de aanvullende informatie die de geobserveerde restoplossingen geven.

12.2 Onderzochte restoplossingen

De categorie *Rest* is geconstrueerd om onderscheid te maken tussen twee typen fouten die leerlingen kunnen maken bij het oplossen van opgaven en om oplossingen die onbetrouwbare of niet valide informatie geven buiten de analyse te houden.

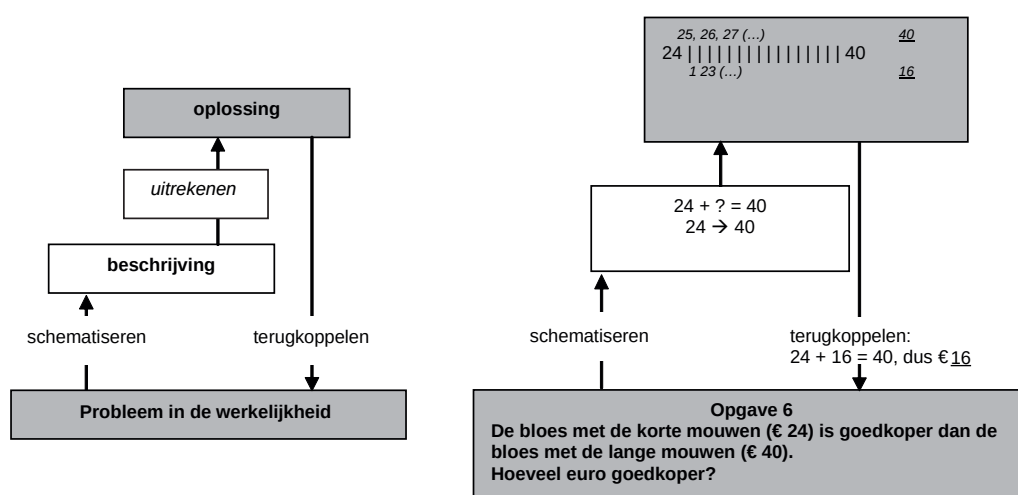
Het schema van figuur 12.1, dat aan Gravemeijer (1996) is ontleend, laat de fasen en

handelingen zien van het proces dat zich in het hoofd van de leerlingen afspeelt als ze een contextprobleem oplossen.

Een probleem als dat van opgave 6 wordt in drie fasen opgelost:

- De leerling moet eerst de probleemsituatie wiskundig beschrijven, door de relevante gegevens van de opgave in relatie met elkaar te brengen. Het resultaat is een schema dat de wiskundige structuur van het probleem weergeeft (*schematiseren*, bijvoorbeeld met een stipsom, een boog tussen twee getallen of in pijlentaal).
- Hij moet vervolgens, de getallen van dit schema bewerken om het onbekende gegeven te kunnen vinden (*uitrekenen*, bijvoorbeeld via doortellen met telstreepjes).
- De leerling moet tenslotte de uitgevoerde rekenhandelingen én de uitkomst in het licht van de context interpreteren om de gestelde vraag te kunnen beantwoorden (*terugkoppelen*, in ons voorbeeld door de telafstand tussen 24 en 40 op te vatten als het gevraagde verschil in prijs).

Figuur 12.1 Probleemoplossing (Gravemeijer, 1994) toegelicht met een geobserveerde oplossing van opgave 6



Op basis van dit schema kunnen we onderscheid maken tussen fouten die ontstaan door:

- een *onjuiste schematisering* van de rekensituatie (type 1);
- een *onjuiste bewerking* van een correcte weergave van de situatie (type 2);
- een *onjuiste interpretatie* van de uitgevoerde rekenhandelingen en gevonden tussenresultaten (type 3);
- een *combinatie van deze fouten* (type 4).

In dit onderzoek vallen de oplossingen met een *onjuiste schematisering* en met *gecombineerde fouten* in de categorie Rest. Oplossingen waarin de leerling het schema foutief heeft bewerkt of zijn handelingen en uitkomsten onjuist heeft geïnterpreteerd vallen onder één van de vier onderscheiden vormen van hoofdrekenen: *Rijen*, *Splitsen*, *Geheugenfeit* of *Redeneren*.

Drie andere typen oplossingen worden ook in de categorie Rest gerangschikt, zoals aangegeven in figuur 12.2:

- oplossingen die door de toetsassistent(e) sterk zijn beïnvloed;
- oplossingen waarin de leerling in de loop van het proces vastloopt, waardoor hij geen antwoord kan geven (fouten van het type 4);
- oplossingen met een correcte interpretatie van de gegevens, maar waarin de leerling er niet in slaagt om duidelijk te maken hoe hij tot zijn antwoord komt.

Figuur 12.2 De vier subcategorieën van de categorie Rest

Subcategorieën	Kenmerk
1 Sturing	De toetsassistent(e) heeft het oplossingsproces sterk beïnvloed.
2 Onjuiste schematisering	De leerling heeft de rekensituatie niet correct in kaart gebracht.
3 Geen antwoord	De leerling loopt vast en kan geen antwoord geven.
4 Anders	De leerling heeft de situatie correct in kaart gebracht maar kan niet duidelijk maken hoe hij tot het gevonden antwoord is gekomen.

Van het begin af aan was het duidelijk dat er risico's kleven aan het gebruik van schriftelijk voorgelegde contextproblemen om het vaardigheidsniveau van de leerling te bepalen.

Teunissen (Wijnstra, 1988) formuleerde de bezwaren, globaal weergegeven, als volgt:

- De verbale aanbieding in de vorm van een 'rekenverhaal' stelt de leerling voor extra problemen in vergelijking met probleem oplossen zoals het dagelijks, in de eigen omgeving wordt bedreven en ervaren.
- De leerling moet zich namelijk mentaal een model van de situatie vormen dat relevante informatie met elkaar in verband brengt, vanuit deze modellering iets berekenen en de uitkomst van deze berekeningen weer in de probleemsituatie terugplaatsen.
- Dit doet een beroep op taalvaardigheden die de kans op succes beïnvloeden:
"De leerling moet de semantische structuur van de opgave doorgronden om tot het mentale of conceptuele model te komen. Hij moet de betekenis van de kernwoorden kennen en voldoende leesvaardigheidsstrategieën bezitten om de betrekkingen die in de tekst zijn beschreven te kunnen decoderen." (pagina 171).

Recente onderzoeken naar de interacties van allochtone leerlingen tijdens de lessen rekenen-wiskunde (Van de Berg, 2005) en naar taalontwikkeling tijdens de wiskundelessen (Van den Boer, 2003), ondersteunen weliswaar de argumenten van Teunissen, maar geven ook aan, dat er met en rond de taal in rekenen-wiskunde meer aan de hand is.

De rekenlessen zijn inderdaad 'taliger' geworden (Van Eerde en Van den Boer, 2005). Leerlingen moeten nu drie soorten talen leren:

- de taal die het gebruik van de contexten met zich meebrengt, bijvoorbeeld de uitdrukking 'hoogteverschil' (contexttaal);
- de taal die gebruikt wordt om problemen op te lossen en te redeneren, bijvoorbeeld het woord 'twee keer zoveel' (schooltaal);
- de begrippen en formuleringen van de wiskunde als discipline, bijvoorbeeld 'afsplitsen en compenseren' (vaktaal).

Toch liggen veel communicatieproblemen tussen de leraar en de leerlingen dieper dan alleen het niet kennen van bepaalde begrippen. Het kernprobleem is dat leerlingen die de Nederlandse taal niet goed beheersen uit zichzelf 'manieren' bedenken om hun taalprobleem te omzeilen. Ze stellen geen vragen en hebben sterk de neiging om eerder de aanpak van de docent te volgen dan eerst zelf met het probleem aan de slag te gaan. Hun docenten gaan er op hun beurt van uit dat ze wel vragen zullen stellen, als ze iets niet begrijpen. Ze merken dan hun trucjes niet op, omdat ze er niets van weten. Zo ontstaat de vicieuze cirkel van de miscommunicatie.

Het is denkbaar dat leerlingen die minder taalvaardig zijn dergelijke problemen tijdens de hoofdrekenlessen ondervinden en als gevolg daarvan structureel in de problemen komen, als ze schoolse contextproblemen die mondeling of schriftelijk zijn aangeboden, moeten interpreteren

en oplossen.

De voorgelegde opgaven en geobserveerde oplossingen roepen dan onderstaande onderzoeksvragen op.

12.3 Onderzoeksvragen

- 1 Hoe zijn de oplossingen binnen de restcategorie verdeeld?
- 2 Hoe varieert deze verdeling onder invloed van de moeilijkheidsgraad en andere kenmerken van de gemaakte opgaven?
- 3 Welke typen oplossingen en fouten bepalen het sterkst het succes (c.q. falen) van de leerlingen bij aftrekken onder de 1000?

12.4 Analyse

Vier subcategorieën

Binnen de restcategorie zijn er vier subcategorieën van oplossingen onderscheiden:

- *Anders*
Hieronder vallen alle oplossingen waarin de leerling de rekensituatie correct heeft geschematiseerd, een antwoord geeft, maar niet duidelijk kan maken hoe hij tot dit antwoord is gekomen. Hij rekent ‘anders’ dan via Rijken, Splitsen, Geheugenfeit en Redeneren.
- *Onjuiste schematisering*
Hiertoe rekenen we alle oplossingen waarin de leerling de tekst en de getallen van de opgaven verkeerd heeft geïnterpreteerd en de rekenrelatie onjuist heeft geschematiseerd.
- *Ontoereikend begrip*
Van ontoereikend begrip is sprake, als de leerling ergens vastloopt tijdens het oplossingsproces, waardoor hij geen antwoord kan geven op de vraag van de opgave.
- *Sturing*
Een oplossing krijgt ten slotte het etiket *sturing*, als de leerling door toedoen van de toetsassistent(e) aan zijn antwoord komt

Invloed van opgavenkenmerken

Het aantal oplossingen (van de subcategorieën) is beperkt om de invloed van opgavenkenmerken statistisch te kunnen vaststellen. Aanwijzingen worden gevonden door te vergelijken hoe de frequentieverdeling varieert in relatie tot de moeilijkheidsgraad van de opgaven. De variatie wordt weergegeven met behulp van staafgrafieken, waarin de opgaven van de betreffende vaardigheidsgroep in oplopende volgorde van moeilijkheidsgraad zijn geordend.

Aandeel in het aantal foutieve oplossingen bij aftrekken

Om vast te kunnen stellen wat doorslaggevend is voor het succes (c.q. het aantal foutieve oplossingen) van de leerlingen zijn alle geobserveerde aftrekoplossingen in vier oplossingscategorieën gegroepeerd. De grootste categorie aftrekoplossingen wordt gevormd door alle aftrekoplossingen van het type Rijken, Splitsen, Geheugenfeiten en Redeneren: (1) *RSGR*. Naast deze hoofdgroep, worden drie groepen gevormd bestaande uit de oplossingen van de restcategorie: (2) *Anders*, (3) *Schematisering en begrip* en (4) *Sturing*.

Onjuiste schematisering en ontoereikend begrip zijn samengenomen, omdat beide typen fouten sterk met elkaar samenhangen.

Op basis van deze groepering stellen we eerst de gebruiksfrequentie vast (*gebruiksverdeling*) en vervolgens het aantal gemaakte fouten om verhoudingsgewijs te kunnen uitrekenen in welke mate elk type oplossingswijzen bijdraagt aan het falen van de leerlingen (*aandeel in falen bij aftrekken*).

12.5 Resultaten

Hoe zijn de oplossingen binnen de restcategorie verdeeld?

Uit de frequentieverdeling in tabel 12.3 zijn drie aanwijzingen af te leiden:

- Het aantal oplossingen waarbij de leerling niet duidelijk kan maken hoe hij rekt, is vrij stabiel. Het percentage oplossingen van dit type varieert tussen 53% (Hoog) en 62% (Midden).
- Dit geldt, globaal genomen, ook voor het aantal oplossingen waarin het probleem onjuist is geschematiseerd. Het percentage oplossingen van dit type varieert tussen 10% in de groep Laag en 15% in de groep Hoog.
- Kenmerken van de opgaven in combinatie met kenmerken van de leerlingen zorgen echter voor grotere verschillen in de subcategorie ‘ontoereikend begrip’ en ‘sturing’.
In ruim een kwart van de restoplossingen van de groep Hoog loopt de leerling vast, terwijl de frequentie in de groepen Laag en Midden kleiner is dan 10%.
Ook de sturing is minder stabiel. Het varieert tussen ruim een kwart in de groep Laag en 6% in de groep Hoog. Ook in de groep Midden vindt relatief veel sturing plaats (bijna 20%).

Figuur 12.3 Frequentieverdeling binnen de categorie rest

Groep	Anders	Foutieve schematisering	Ontoereikend begrip	Sturing	Totaal Rest
Laag	65 (55%)	12 (10%)	10 (8%)	32 (26%)	119 (100%)
Midden	40 (62%)	8 (12%)	4 (6%)	12 (19%)	64 (100%)
Hoog	18 (53%)	5 (15%)	9 (26%)	2 (6%)	34 (100%)

Bovenstaande verdelingen kunnen niet met elkaar worden vergeleken, omdat de leerlingen niet dezelfde sets opgaven hebben gemaakt en omdat de uitkomst van het oplossingsproces mede wordt bepaald door het wel of niet uit het hoofd rekenen.

De verschillen in frequentie geven echter aanleiding om een aantal veronderstellingen te formuleren die in vervolgonderzoeken kunnen worden getoetst.

Met betrekking tot de reconstructie en uitleg van de eigen oplossing

Het aantal restoplossingen waarin de leerling niet duidelijk maakt hoe hij zijn antwoord heeft gevonden, varieert globaal genomen tussen 50% en 60%. Leerlingen uit de groep Laag, Midden en Hoog hebben opgaven gemaakt die, globaal genomen, bij hun vaardigheidsniveau passen (zie hoofdstuk 1). Dat ze ongeveer even vaak moeite hebben om duidelijk te maken hoe ze rekenen, suggereert dat de moeilijkheidsgraad van de opgave bepalend is en dat de afnamecondities voor alle de drie vaardigheidsgroepen, verhoudingsgewijs, even ‘belastend’ zijn.

Met betrekking tot de schematisering

Het aantal restoplossingen met een onjuiste schematisering is in alle drie de vaardigheidsgroepen laag. Het varieert tussen 10% en 15%. Dit suggereert dat de taligheid van de set opgaven bij lange na niet doorslaggevend is voor het succes van leerlingen. Leerlingen met een lage rekenvaardigheid lijken minder problemen te hebben met 'decodering' van het rekenverhaal dan gedacht. Dit wordt bevestigd door het relatief lage percentage oplossingen van het type 'ontoereikend begrip' in de groep Laag, in vergelijking met de frequentie in de groep Hoog (8% tegen 26%).

Ontoereikend begrip

Het hoge percentage oplossingen waarin een leerling uit de groep Hoog vastloopt laat zich verklaren door het feit dat in deze groep aftrekopgaven met getallen groter dan 100 en zelfs 1.000 zijn voorgelegd die in veel (misschien zelfs de meeste) klassen nog niet aan de orde zijn geweest.

Sturing

De eerste reactie van de leerling op de opgave beïnvloedt het gedrag van de toetsassistent(e). De neiging om te sturen neemt toe, naarmate de leerling de indruk geeft dat hij de opgave niet begrijpt of geen kant-en-klare oplossing voorhanden heeft. In die zin wijst de mate van sturing van de toetsassistent(e) op de mate van ontoereikend begrip bij de leerling.

Het relatieve grote aantal oplossingen waarin de toetsassistent het oplossingsproces heeft gestuurd, laat zich pedagogisch verklaren. De tijdelijke medewerkers zien niet graag leerlingen door 'hun' toedoen in de problemen raken en proberen hen dan, ondanks de voorschriften, op weg te helpen.

De hoge frequentie van dit type oplossingen in de groepen Laag en Midden wijst wel uit dat, in jaargroep 5, er leerlingen zijn die op hun tenen moeten lopen om de voortgang van klas te volgen.

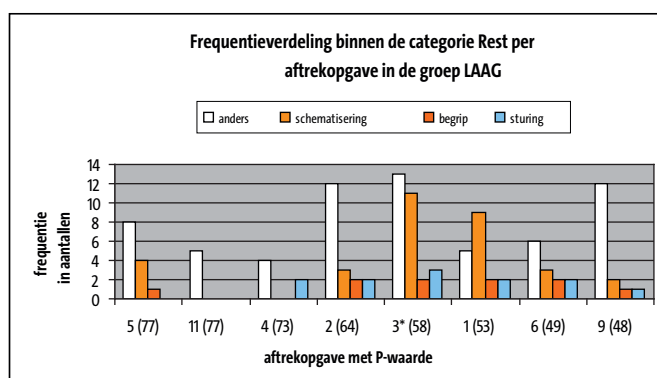
Hoe varieert deze verdeling onder invloed van de moeilijkheidsgraad en andere kenmerken van de gemaakte opgaven?

In de drie staafgrafieken van figuur 12.4 zijn de opgaven die de leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog hebben gemaakt, in oplopende volgorde van moeilijkheidsgraad geordend. Per vaardigheidsgroep zetten we de aanwijzingen die hieruit af te leiden zijn op een rij.

Groep Laag

De staven van de grafiek in figuur 12.4a zijn niet eenduidig te interpreteren. Er tekent zich wel een trend af die suggereert dat het aantal restoplossingen toeneemt naarmate de opgaven moeilijker zijn.

Figuur 12.4a Frequentieverdeling binnen de categorie Rest per aftrekopgave in de groep Laag

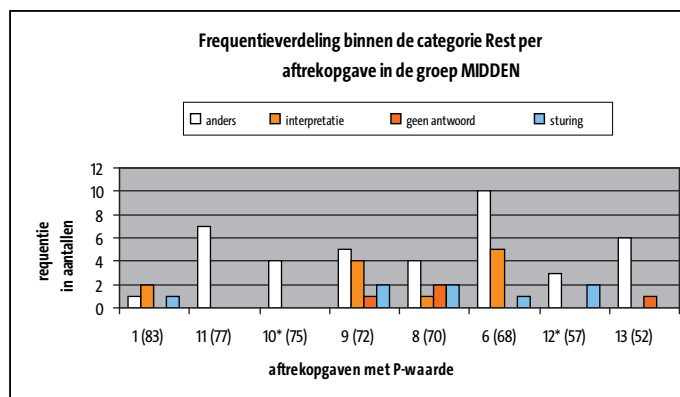


Dat de context en/of de getallen per opgave een rol spelen, blijkt onder andere uit het verschil in de frequentie en de verdeling van de restoplossingen van de twee gemakkelijkste opgaven. Opgave 5 lokt dertien restoplossingen uit, waarvan vijf uit de categorie *Foutieve schematisering* en *Ontoereikend begrip*, terwijl opgave 11 slechts vijf restoplossingen van het type *Anders* uitlokt. Twee moeilijke opgaven genereren het grootste aantal foutieve schematiseringen: de kale aftrekking 60 – 35 van opgave 5 (58% goed) en het probleem van de munten van opgave 1 (53% goed).

Groep Midden

De tendens die in de groep Laag is geobserveerd is ook herkenbaar in de frequentieverdeling van de restoplossingen van de groep Midden voor wat betreft de eerste zes opgaven. De twee laatste en moeilijkste opgaven lokken vooral ‘andere’ oplossingen uit.

Figuur 12.4b Frequentieverdeling binnen de categorie Rest per aftrekopgave in de groep Midden

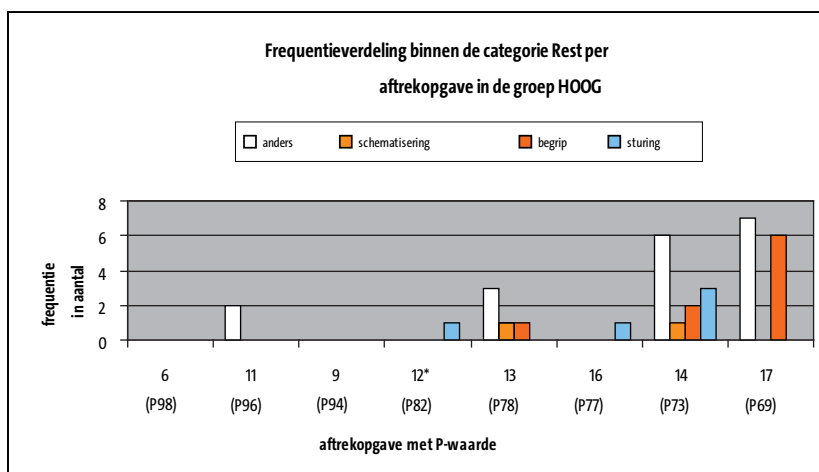


Groep Hoog

De invloed van de moeilijkheidsgraad van de opgave is zeer pregnant in de verdeling van de restoplossingen van de groep Hoog. De, voor deze leerlingen, gemakkelijke opgaven 6 en 9 lokken geen restoplossingen uit, in tegenstelling tot de moeilijkere opgaven 13, 14 en 17. De frequentie van de restoplossingen hangt overigens in die gevallen samen met het getalgebied waarin de leerlingen aftrekken: aftrekken onder de 100 bij opgave 6 en 9 en aftrekken boven de 100 bij opgave 13, 14 en 17.

Ook in deze groep beïnvloedt de context en/of de getallen het totaal aantal restoplossingen én de frequentieverdeling binnen deze categorie. Dit blijkt onder ander uit de verschillen tussen opgave 14 en 16. Het gaat in beide gevallen om aftrekken met getallen groter dan 100 die een beroep doen op een vergelijkbaar vaardigheidsniveau (P73 tegen P77). Opgave 16 lokt slechts één restoplossing uit, terwijl 12 oplossingen van opgave 14 het etiket Rest hebben gekregen: 6x anders, 1x onjuiste schematisering, 2x ontoereikend begrip en 3x sturing.

Figuur 12.4c Frequentieverdeling binnen de categorie Rest per aftrekopgave in de groep Hoog



Concluderend kunnen we stellen dat het aantal en de verdeling van de restoplossingen samenhangt met de kenmerken van de opgaven die problemen oproepen en dat de moeilijkheidsgraad van deze opgave in de regel een goede voorspeller is.

Aandeel van typen hoofdrekentoplossingen in het beperkte succes bij aftrekken

We presenteren ten slotte de gebruiksfrequentie van de vier onderscheiden typen oplossingswijzen (zie paragraaf 12.4) en gaan binnen de vaardigheidsgroepen na welk aandeel de in deze oplossingen gemaakte fouten hebben in het totaal aantal gemaakte fouten.

Gebruiksfrequentie

Figuur 12.5a laat de gebruiksfrequentie zien van de onderscheiden typen oplossingswijzen.

Uit deze resultaten zijn de volgende aanwijzingen af te leiden:

- Bij de oplossingen van aftrekopgaven varieert de gebruiksfrequentie van de vier geleerde hoofdrekentmethoden tussen 80% (groep Laag) en 95% (groep Hoog).
- Het aantal oplossingen waarin de leerling de opgave correct heeft geschematiseerd, maar niet duidelijk kan maken hoe hij tot zijn antwoord is gekomen is laag. Dit type oplossingen komt het meest voor in de groep Laag (11%). Leerlingen uit de groep Hoog kunnen in de regel erg goed hun oplossingen reconstrueren en toelichten (3% Anders).
- De frequentie van de oplossingen waarin de opgave verkeerd is geschematiseerd of de leerling vastloopt, is verhoudingsgewijs zeer laag, hooguit 4% in de groep Laag.
- Dit geldt ook voor de frequentie waarbij er sprake is van teveel sturing. Ook dit type oplossingen komt, verhoudingsgewijs, het meest voor in de groep Laag.

Figuur 12.5a Gebruiksfrequentie van de onderscheiden type oplossingen

Groep	Rijgen, Splitsen, Geheugenfeit en Redeneren	Anders	Foutieve Schematisering of ontoereikend begrip	Sturing	Totaal
Laag	498 81%	65 11%	22 4%)	32 5%	617 100%
Midden	561 90%	40 6%%	12 2%	12 2%	625 100%
Hoog	606 95%	18 3%	14 2%	2 0%	640 100%

Al met al kunnen we concluderen dat de oplossingen van het type Rijgen, Splitsen, Geheugenfeit en Redeneren hun stempel drukken op het succes en het falen van de leerlingen en dat de overige oplossingen slechts een secundaire rol spelen, omdat hun frequentie zo laag is.

Aandeel in de resultaten bij aftrekken

De percentages van figuur 12.5b laten ten slotte het aandeel van de onderscheiden typen oplossingen zien in de resultaten bij aftrekken, halverwege de basisschool:

Figuur 12.5b Aandeel van de onderscheiden type oplossingen in de resultaten bij aftrekken

Groep	Aantal fouten en aandeel per categorie oplossingswijzen				Totaal
	Rijgen, Splitsen, Geheugenfeit en Redeneren	Anders	Foutieve Schematisering of ontoereikend begrip	Sturing	
Laag	129 55%	50 21%	22 9%	32 14%	233 100%
Midden	132 71%	30 16%	12 6%	12 6%	186 100%
Hoog	85 75%	13 11%	14 12%	2 2%	118 100%

- In de groepen Midden en Hoog komt respectievelijk 71% en 75% van de fouten voort uit de oplossingen waarin de leerling één van de vier hoofdrekenmethoden heeft toegepast (Rijgen, Splitsen, Geheugenfeit en Redeneren). In de groep Laag is dit aandeel iets meer dan de helft van het totaal aantal fouten.
- Het aandeel van de categorie Anders verschilt ook per vaardigheidsgroep. Het varieert, globaal genomen, tussen 10% in de groep Hoog en 20% in de groep Laag.

- Dit geldt ook voor het aandeel van de categorie Teveel sturing, waarbij de percentages uiteenlopen van 2% in de groep Hoog tot 14% in de groep Laag.
- Het aandeel van de categorie Foutieve schematisering en ontoereikend begrip is het grootst in de groepen Laag en Hoog. Het schommelt in die groepen rond 10% van het totaal aantal fouten.

Bovenstaande gegevens suggereren, dat het succes/falen bij aftrekken vooral wordt bepaald door de mate waarin de leerlingen inzichtelijk rijgen, splitsen, redeneren en geheugenfeiten gebruiken.

Het zijn de leerlingen aan beide kanten van de verdeling die het vaakst in de problemen komen bij het schematiseren van de aftreksituaties, al of niet in combinatie met het uitrekenen en interpreteren van de rekenhandelingen. Dit kan worden verklaard door de gemiddelde moeilijkheidsgraad van hun set opgaven en het taalgebruik in de moeilijkste opgaven van deze sets. De verdeling van de restoplossingen en het aantal fouten bij opgave 1 (groep Laag) en opgave 17 (groep Hoog) ondersteunen deze veronderstelling:

- Opgave 1 is voor leerlingen van de groep Laag moeilijk (53% goed). Het genereert 12 oplossingen waarin de leerling onjuist schematiseert of vastloopt.
- Voor leerlingen uit de groep Hoog is opgave 17 het moeilijkst (69% goed). In zes oplossingen zijn leerlingen vastgelopen, de hoogste frequentie in deze categorie.

12.6 Conclusie

Wat is doorslaggevend bij aftrekken? Dit is de kernvraag aan het einde van deze afsluitende rapportage.

We hebben via de analyse van de structurele fouten die leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog bij rijgen, splitsen en redeneren maken vier bronnen van problemen geïdentificeerd (zie hoofdstuk 9, 10 en 11):

- 1 Sommige leerlingen, vooral uit de groep Laag, begrijpen de rijgschema's die vaak in context-situaties worden gebruikt nog onvoldoende of hebben deze schema's nog onvoldoende verkort of geautomatiseerd om ze met een goede kans op succes toe te passen.
- 2 Het komt in alle drie de vaardigheidsgroepen regelmatig voor, dat leerlingen in contexten waarbij er sprake is van aanvullen, verschil bepalen of part bepalen splitsend of redenerend aanvullen. In die situaties is rijgen voor hen vaak functioneler, omdat veel van deze leerlingen de toegepaste splits- en/of redeneerprocedures nog onvoldoende begrijpen.
- 3 Leerlingen laten zich regelmatig verblinden door getallen die ze 'mooi' of 'handig' vinden, zowel in contexten als bij kale aftrekkingen. Als ze deze getallen met bekende geheugenfeiten associëren, proberen ze het onbekende getal van de opgave uit een dergelijk feit af te leiden. Ze vergissen zich dan regelmatig bij compenseren, omdat ze door de afwissellende vormen van afsplitsen verschillend regels moeten toepassen die ze nog niet goed overzien.
Leerlingen die het foutieve splitschema hebben ingeslepen (verwisseling van de eenheden) vinden getallen 'handig', als ze de tientallen en eenheden gemakkelijk kunnen aftrekken, bijvoorbeeld omdat ze hiervoor bekende dubbelrelaties kunnen gebruiken ($48 - 24 = 26$ want $40 - 20 = 20$ en $8 - 4 = 4$).
- 4 Rekenen uit het hoofd zonder daarbij aantekeningen op papier te maken, vormen een vierde bron van problemen. Dit komt doordat het werkgeheugen, bij omslachtige berekeningen, zwaar wordt belast en omdat de leerlingen achteraf moeilijk kunnen controleren of de uitgevoerde rekenhandelingen en de gevonden (tussen)antwoorden wel kloppen.

De analyse die in dit hoofdstuk is gerapporteerd toont aan, dat bovenstaande gedragspatronen ruim 50% van de aftrekfouten in de groep Laag genereren en tussen 70% en 75% van de fouten in de groepen Midden en Hoog.

Deze analyse wijst ook uit dat de kenmerken van de opgaven die samen de moeilijkheidsgraad van een opgave bepalen, een vijfde bron van problemen vormen. Het taalgebruik is daar één van. Het effect wordt enerzijds zichtbaar in de onjuiste schematisering van de aftrekopgaven en het aantal keer dat leerlingen vastlopen en anderzijds in de sterke sturing door de toetsleider. De invloed van de taal is echter veel kleiner dan men geneigd is te denken. Op basis van de geobserveerde oplossingen komt hooguit 12% van het totaal aantal foutieve antwoorden van de groepen Laag en Hoog direct voort uit de moeizame of onjuiste interpretatie van het rekenverhaal en de foutieve schematisering van de relevante gegevens van de tekst.

Het meest doorslaggevend is, samengevat, (1) de mate waarin de leerlingen inzichtelijk en met papier hoofdrekenen en (2) hun aftrekstrategie en -procedures adequaat afstemmen op de context en/of de getallen van de opgaven.

Het taalgebruik doet er zeker toe, maar vooral in combinatie met andere kenmerken van de opgave die de moeilijkheidsgraad daarvan bepalen.

Impressies van restoplossingen

Te veel sturing	
Laag. Opgave 2 Op de geluidsband: Toetsassistent: Wat ga je doen? Leerling: 18 min ... nee ... 22 – 18. Eerst 22 – 4 is ook 18. Toetsassistent: Wat is het antwoord? Je zei het goed! Leerling: 22? Toetsassistent: Nee! Wat haal je eraf, zei je? Leerling schrijft dan de 4 op van $22 - 4 = 18$	Hoog. Opgave 15 Eerst: $600 + 300 = 900$ Dan: $98 + 6$ weer erbij; $8 + 6 = 14$, dus 114 Gaat de som boven de duizend? $998 + 6$ erbij. Twee erbij is 1.000; $1.000 + 4 = 1.400$ Herstelt met hulp van de juf: 1.400 wordt 1.004 (1.004 komt van de juf en niet van de leerling)
Onjuiste schematisering	
Laag. Opgave 3 Leerling: Die snap ik niet! Toetsassistent: Lees nog eens Leerling leest nog eens het verhaal en telt daarna 25 bij 50 op: $50 + 20 = 70$; $70 + 5 = 75$	Hoog. Opgave 14 Moet ik ze optellen? Volgens mij wel: $620 + 370$. Ik doe het tussen streepjes. $900 \mid 90 \mid 0$ In boek: $620 + 370 = 990$ $1900 \mid 90 \mid 0$

Vervolg Impressies van restoplossingen

Geen oplossing

Laag. Opgave 3

Ze kijkt omhoog, doet veel in haar hoofd, maar zegt niets.
Ze begint met haar benen te wiebelen.
Ik laat het haar opnieuw lezen.
We gaan naar de volgende vraag.

Hoog. Opgave 17

$$998 + ? = 1.662$$

$$998 + 2 = 1.000$$

$$1.000 + 600 = 1.600$$

$$1.600 + 60 = 1.660$$

$$1.660 + 2 = 1.662$$

Weet het echt niet; twijfelt.

Eh! dan plus 600 is zeshonderdduizend

(schrijft echter 1600 op)

Ik weet niet.

Leerling weet niet hoe ze het getal dat ze in het hoofd heeft moet uitspreken.

Twijfelt.

Toetsassistent: Schrijf maar op wat je denkt.

Toetsassistent: Ben je er al?

Leerling: Nee.

Plus is honderd duizend zes ($100 + 600 = 1.600$)

Toetsassistent: schrijf maar op wat je denkt → 1.660

Plus 2 eigenlijk, en dan ben je klaar!

$$1.660 + 2 = 1.662$$

Toetsassistent: Ben je er al?

Leerling: Eh...plus 2! Maar, dat moest niet! Dat heb ik al gedaan!

Toetsassistent: Lees het antwoord maar.

Leerling: Dit kan niet. Super moeilijk deze! Ja!

Anders

Laag. Opgave 2

Kijkt eerst bij tien: 10 tegen 20, dat is 10 meer.
Kijkt dan bij lossen en dat is 14 kilo meer.

Hoog. Opgave 17

Antwoord: 664

$$900 + 100 = 1000$$

$$100 + 60 = 1.060$$

$$1.060 + 600 = 1.660; 1.660 + 2 = 1.662$$

$$1.662 - 600 = 1.062; 1.062 - 60 = 1.002$$

$$1.002 - 2 = 1.000; 1.000 - 300 = 700$$

$$700 - 30 = 670; 670 - 6 = 664$$

$$664 - 30 = 634; 634 - 6 = 628$$

Aan de slag

13 Balans en verbeterpunten

13 Balans en verbeterpunten

Leraren en leerlingen realiseren maar gedeeltelijk het doel van flexibel hoofdrekenen. Veel leerlingen kunnen op een inzichtelijke manier flexibel rijgen. Een grote groep geobserveerde leerlingen strandt echter bij het gecombineerde gebruik van rijgen, splitsen en redeneren. Deze leerlingen begrijpen splitsen en redeneren niet goed genoeg en/of gebruiken deze hoofdrekenmethoden in situaties waar rijgen meer voor de hand ligt. De huidige manier van leren hoofdrekenen werkt bovendien een zeer grote niveaudifferentiatie in de hand die het noodzakelijke maatwerk complex en moeilijk uitvoerbaar maakt. Zo luidt de balans van hoofdrekenen aan het begin van deze 21ste eeuw. Onderzoekers, auteurs van methoden, toetsontwikkelaars en leraren zijn nu aan zet. De geformuleerde verbeterpunten van dit afsluitende hoofdstuk zijn voor hen bedoeld.

13.1 Inhoud

In paragraaf 1.3 formuleerden we het doel van onderhavige studie als volgt:

Het onderzoek moet aanwijzingen geven over hoe leerlingen halverwege de basisschool hoofdrekenen, vooral in aftreksituaties en in contexten waar aftrekken een andere betekenis heeft dan weghalen ('erafsommen') omdat deze contexten problematisch blijven.

In dit afsluitende hoofdstuk richten we de aandacht op aanwijzingen die deze studie heeft verschaft over de meer algemene en de meer specifieke vraag van de studie:

- Hoe komt het dat aftrekken onder de 100 door een grote groep leerlingen nog onvoldoende wordt beheers
- Hoe beïnvloeden de contexten en de getallen de leerling bij zijn aanpak en oplossingen van aftrekopgaven en welke leerproblemen liggen aan deze beïnvloeding ten grondslag?

We inventariseren eerst de belangrijkste aanwijzingen over de aard en de bron van de problemen, zetten in het verlengde hiervan de sterke punten van het huidige hoofdrekenonderwijs af tegen de zwakke punten, maken daarna de balans op in het licht van het doel dat wordt nagestreefd en formuleren ten slotte discussiepunten ter verbetering van de huidige onderwijs- leercondities in dit domein voor de betrokken onderzoekers, auteurs van rekenmethoden, toetsdeskundigen en leraren.

13.2 Aanwijzingen

In deze paragraaf presenteren we de gevonden aanwijzingen over de invloed van kenmerken van de aftrekopgaven op de aanpak en de oplossing van deze opgaven, het structurele effect van deze invloed op de manier van hoofdrekenen en de leerproblemen die hierdoor ontstaan.

Aanwijzingen over de invloed van de kenmerken van de opgaven

De analyse van de oplossingen wijst erop dat leerlingen uit de groepen Laag, Midden en Hoog *strategisch* hoofdrekenen. Dit betekent dat ze *verschillend* hoofdrekenen, afhankelijk van (a) de *vorm* van de opgaven (kaal of contextprobleem), (b) de *betekenis* van aftrekken in deze opgaven en (c) de *getallen* van de opgaven.

Er tekent zich een trend af die suggereert dat leerlingen uit de groep Laag zich vaker laten leiden door de context dan leerlingen uit de groepen Midden en Hoog. Ze houden echter wel degelijk rekening met enerzijds de vorm en anderzijds de getallen van de opgaven. Dit komt bijvoorbeeld tot uitdrukking in het relatief grote aantal splitsoplossingen van de kale aftrekking $60 - 35$ en het grote aantal oplossingen waarin de leerlingen redenerend hoofdrekenen, bijvoorbeeld door de associatie van $24 + ? = 40$ met $20 + 20 = 40$.

Effect van de context en de getallen op de manier van hoofdrekenen

Effect van de context

Er zijn sterke aanwijzingen dat de invloed van de context in twee effecten resulteert:

- Leerlingen gebruiken een breed scala van rijgschema's waarbij ze de sprong naar het tienvoud, direct springen met 10 of eerst de eenheden bewerken met één van de drie alternatieve aftrekstrategieën (aftrekken, optellen tot en aftrekken tot) combineren:

Opgave 6

- $40 - 24$ via $(40 - 20) - 4$
- $24 + ? = 40$ via $(24 + 6) + 10$ of $(24 + 10) + 6$
- $40 - ? = 24$ via $(40 - 10) - 6$ of $(40 - 6) - 10$
- Ze gebruiken ook splitsen of redeneren in combinatie met de aanvulstrategie.
 - $24 + ? = 40$ via $20 + 20 = 40$; $4 + 6 = 10$; samen 26 (foutief)
 - $24 + ? = 40$ via $20 + 20 = 40$, 24 is 4 meer, dus 4 minder is 16 (correct)
 - $24 + ? = 40$ via $20 + 20 = 40$ en 4 erbij is 24 (foutief)

Effect van de getallen

De analyse van het gebruik van splitsen enerzijds en redeneren anderzijds wijst erop dat de getallen van de opgaven de leerling aansporen om splitsend of redenerend af te trekken in plaats van met één van de negen alternatieve rijgschema's.

Leerproblemen

Met betrekking tot de context

De goede resultaten die leerlingen uit alle drie de vaardigheidsgroepen bij rijgend aftrekken behalen, bevestigen de verwachte kracht van de rijgmethode en de positieve effecten van flexibel leren rijgen op basis van minsten 6 van de 9 alternatieve rijgschema's (zie hoofdstuk 7). De (zeer) matige resultaten bij splitsen en redeneren, signaleren echter dat het voorlopig niet loont om flexibel te rekenen op basis van rijgen, splitsen én redeneren.

Het negatieve effect van de contexten en de getallen op de aanpak en oplossingen van de leerlingen komt tot uitdrukking in onderstaande structurele fouten die zij bij rijgend, splitsend en redenerend aftrekken maken.

Begrip, automatisering en verlies van overzicht bij rijgend overbruggen

De resultaten van de foutenanalyse van de rijgoplossingen wijzen erop dat leerlingen uit alle drie de vaardigheidsgroepen, maar vooral uit de groep Laag, regelmatig fouten maken, als ze overbruggend aftrekken. Ze begrijpen de gebruikte rijgschema's niet goed of hebben deze schema's onvoldoende geautomatiseerd en verliezen ook vaak het overzicht op wat ze doen, omdat ze uit het hoofd rekenen (zie hoofdstuk 9).

Misconceptie bij splitsend aanvullen

Een van de twee hoofdproblemen bij splitsen is dat leerlingen met tientallen en eenheden aanvullen (als alternatief voor aftrekken), ook als de getallen zich daar niet voor lenen, zoals $24 + ? = 40$ bij opgave 6 (zie hoofdstuk 11). Ze realiseren zich bijvoorbeeld niet dat ze één tiental vormen om de vier eenheden tot 10 aan te vullen:

- $4 + 6 = 10$; dan hoeft ik nog maar 10 bij 20 op te tellen; 10 en 6 is samen 16.
- en niet: $20 + 20 = 40$; $4 + 6 = 10$; samen 26

Misconceptie bij afsplitsen en compenseren in combinatie met aanvullen

Leerlingen raken op een vergelijkbare manier in de war bij aanvullend optellen via afsplitsen en compenseren (zie hoofdstuk 12), omdat ze mentaal niet goed kunnen voorstellen hoe compenseren in dergelijke gevallen werkt:

- $24 + ? = 40$ via
- $20 + 20 = 40$
- 24 is 4 meer dan 20
- dan gaat 4 van 20 af
- $20 - 4 = 16$

Met betrekking tot de getallen

De negatieve invloed van de getallen komt vooral tot uitdrukking in de structurele fouten die leerlingen bij splitsend en redenerend aftrekken maken.

Misconceptie bij splitsend aftrekken

Met name leerlingen met een lage vaardigheid laten zich bij splitsen regelmatig misleiden door de tientallen van de getallen. Ze weten bijvoorbeeld dat $50 - 30 = 20$, omdat $5 - 3 = 2$ en verwisselen vervolgens de eenheden om $50 - 32$ uit te rekenen:

$50 - 32$ via $50 - 30 = 20$; $0 - 2 \rightarrow 2 - 0 = 2$; samen 22

Verstrikt raken in de wirwar van compensatieregels

Sommige getallencombinaties roepen de associatie op met optellingen, 'dubbelen' en splitsingen van 100 die leerlingen uit jaargroep 5 al uit het hoofd kennen en die ze automatisch aan de bijbehorende aftrekking koppelen:

$$30 + 20 = 50 \leftrightarrow 50 - 30 = 20$$

$$20 + 20 = 40 \leftrightarrow 40 - 20 = 20$$

$$100 = 40 + 60 \leftrightarrow 100 - 40 = 60$$

Ze proberen dan het onbekende getal uit deze 'hulpoptelling' of 'hulpaftrekking' af te leiden, maar raken in de war, omdat ze nog onvoldoende begrijpen hoe ze bij het compenseren rekening moeten houden met het getal dat ze wijzigen en hoe ze dit getal moeten wijzigen. Het gevolg daarvan is dat ze regelmatig in de verkeerde richting compenseren, vooral als ze aanvullend redeneren (zie hierboven de invloed van de context).

Symbolisering

Een bijkomend probleem bij splitsen én redeneren is, dat de leerlingen niet hebben geleerd hun rekenhandelingen in een of andere schriftelijke rekentaal te symboliseren. Omdat ze uit het hoofd splitsen of redeneren, worden ze zich niet bewust van de eventuele misstappen en kunnen ze ook niet achteraf controleren of hun berekening wel klopt.

13.3 Sterkte-zwakte analyse van rijgend, splitsend en redenerend aftrekken

Het strategische gebruik van rijgen in combinatie met splitsen, redeneren en geheugenfeiten, de resultaten die leerlingen op deze manier behalen en de structurele fouten die ze hierbij maken, weerspiegelen de sterke en zwakte kanten van hoofdrekenen van de geobserveerde leerlingen. We zetten hieronder hun sterke punten van rijgen, splitsen en redeneren af tegen hun zwakte punten.

Rijgen

Sterke kanten van de huidige rijghandelingen

De resultaten van de uitgevoerde analyses wijzen erop dat de prioriteit die aan het rijgen wordt gegeven en de wijze waarop leerlingen hebben leren rijgen drie positieve effecten hebben:

- Leerlingen hebben de gelegenheid gekregen om zich breed te oriënteren in de verschillende betekenissen en structuren van aftrekken en in de relatie tussen aftrekken, optellen en aanvullend optellen (rijgen als oriëntatie in de aard en structuur van aftrekken).
- Ze hebben vanuit deze leerervaring een repertoire van rijgschema's ontwikkeld dat hen in staat stelt om af te trekken, rekening houdend met de context en/of de getallen van de voorgelegde aftrekopgaven (rijgen als flexibele vorm van hoofdrekenen).
- Al rijgend raken de leerlingen hoe langer hoe meer vertrouwd met getalrelaties die breed toepasbaar zijn en die uitnodigen om eigenschappen van getallen, getalstructuren en getalrelaties nader te onderzoeken (rijgen als bevordering van het getalbegrip).

Zwakke kanten van rijgen

Rijgen heeft twee kanten die problemen kunnen veroorzaken:

- De formalisering van de oorspronkelijke rijgprocedures is sterk afhankelijk van de vorderingen van de leerlingen met betrekking tot het getalbegrip enerzijds en de ontwikkeling en automatisering van telvaardigheden en basisoperaties anderzijds. Leraren moeten in de loop van jaargroep 4 en 5 tijdig relevante systematische stappen in de ontwikkeling van de getallen en getalrelaties koppelen aan de bijbehorende verhoging van het niveau van rijgen. Er zijn aanwijzingen dat leerlingen uit de groep Laag achterlopen, omdat beide leergangen onvoldoende op elkaar zijn afgestemd.
- Rijgen ligt in veel gevallen voor de hand, kan worden afgestemd op de context en de getallen en is bovendien vaak gemakkelijk uit te voeren, zeker als de leerlingen zijn handelingen schetsmatig symboliseert. Dit alles zorgt ervoor dat leerlingen graag en vaak rijgen. Het kan hierdoor de overgang afremmen naar de formelere vormen van aftrekken: decimaal aftrekken enerzijds en redenerend aftrekken anderzijds (zie splitsen in hoofdstuk 11 en redeneren in hoofdstuk 12). Wellicht blijft een groep leerlingen uit de groep Hoog bij rijgen hangen, terwijl deze leerlingen op grond van hun vaardigheidsniveau al kolomsgewijs zouden kunnen leren aftrekken en puur getalsmatig leren redeneren.

Splitsen

De geobserveerde oplossingen en fouten geven onderstaande aanwijzingen over de sterke en zwakke kanten van splitsen.

Sterke kanten van de huidige splitshandelingen

De resultaten wijzen erop dat leerlingen aanvankelijk betekenisvol splitsen:

- Ze begrijpen hoe ze het principe van ‘tellen met tien en lossen’ kunnen gebruiken om aftrekkingen van het type $25 - 12$ en $36 - 25$, via afsplitsen in tienvouden en eenheden, inzichtelijk uit te rekenen.
- Veel leerlingen uit de groepen Midden en Hoog begrijpen hoe ze het splitsend aftrekken van de tienvouden kunnen combineren met het rijgend bewerken van de eenheden, als ze te weinig eenheden hebben om direct af te trekken:
 $62 - 48$ via $60 - 40 = 20$; $20 + 2 = 22$; $22 - 8 = 20 - 6 = 14$

Zwakke kant van splitsen

De zwakke kant van splitsen is dat sommige leerlingen een foutief splitschema inslijpen, omdat ze aanvankelijk de verwisselings-eigenschap van optellen ook bij aftrekken toepassen. Het gevolg daarvan kan zijn dat leerlingen met een hoge rekenvaardigheid dit foutieve splitschema generaliseren voor aftrekken onder de 1.000.

Redeneren

De geobserveerde oplossingen en fouten geven onderstaande aanwijzingen over de sterke en de zwakke kanten van redeneren.

Sterke kanten van redeneren

De geobserveerde correcte oplossingen weerspiegelen twee sterke kanten van redenerend aftrekken:

- De sterke kant van redeneren komt tot uitdrukking in het grote aantal oplossingen van de groep Laag waarin de leerling de aftrekrelatie van de opgave direct met de equivalente optelling heeft geassocieerd:

$$50 - 25 = 25 \text{ want } 25 + 25 = 50$$

$$100 - 48 = 52 \text{ want } 48 + 52 = 100$$

- Oplossingen waarin de leerling het onbekende getal van de aftrekopgave uit een bekend aftrekfeit heeft afgeleid, wijzen erop dat leerlingen ook begrijpen hoe deze vorm van afsplitsen en compenseren werkt en hoe efficiënt en productief deze manier van redeneren kan zijn:

$$40 - 24 \text{ via: ik weet } 40 - 20 = 20; \text{ dan is 16 vier minder}$$

$$100 - 48 \text{ via: } 100 - 50 = 50, \text{ dat weet ik; } 48 \text{ is 2 minder dan } 50, \text{ dan is het 2 meer, is } 52$$

$$102 - 90 \text{ via: ik weet } 100 - 90 = 10; 102 \text{ is 2 meer dan } 100, \text{ dan is het 2 meer, is } 12$$

Zwakke kant van redeneren

Structurele fouten die leerlingen bij redenerend aftrekken maken, richten de aandacht op twee problemen die redeneren in de hand werken:

- Het redeneren roept ten eerste problemen op in contextsituaties die leerlingen aansporen om het onbekende getal via aanvullend optellen te vinden. Als ze de equivalente optelling niet uit het hoofd kennen, proberen ze deze optelling via afsplitsen en compenseren op te lossen en raken dan regelmatig in de war, omdat deze transformatie en compensatie vrij complex is.

- Een tweede probleem is dat sommige leerlingen, door een misconceptie van compenseren, fouten maken bij redenerend aftrekken die ze niet zouden maken, als ze zouden rijgen (of splitsen). Het schoolvoorbeeld daarvan is de oplossing van $40 - 24$ via 20 en 4 erbij is 24, denkend aan 40 is evenveel als $20 + 20$, terwijl een leerling die rijgt vanzelfsprekend vier van twintig aftrekt:
 $40 - 24$ via $40 - 20 = 20$ en $20 - 4 = 16$
 versus
 $40 - 24$ via: ik weet $40 - 20 = 20$; dan is 24, vier erbij

13.4 Balans van flexibel hoofdrekenen

Rijgen, splitsen en variarekenen hebben zo hun voor- en nadelen. Als leerlingen deze drie hoofdrekenmethoden leren en automatiseren, beschikken ze over een set functionele gereedschappen die ze flexibel kunnen leren gebruiken om de getallen van een probleemsituatie op de meest adequate manier te bewerken.

In hoeverre maken nu de geobserveerde leerlingen uit jaargroep 5 deze doelstelling van flexibel hoofdrekenen waar?

We maken de balans op, uitgaande van de resultaten van bovenstaande sterkte-zwakte analyse en van de aandachtspunten die ter afsluiting van de eerdere hoofdstukken zijn geformuleerd.

Deze balans laat zich, puntsgewijs, als volgt weergeven:

- 1 In alle drie de vaardigheidsgroepen is een groot aantal leerlingen vertrouwd geraakt met de verschillende betekenissen en structuren van aftrekken.
- 2 Op basis van dit begrip van aftrekken en van hun begrip en organisatie van de getallen kleiner dan 100, hebben deze leerlingen de elementaire vormen van rijgen ontwikkeld en deze rijgprocedures in meer of mindere mate geformaliseerd en geautomatiseerd.
- 3 Ze hebben in de loop van jaargroep 4 en 5 een eigen vorm van flexibel rijgen ontwikkeld. Afhankelijk van het type opgave en de context, trekken ze af, vullen ze aan (optellen tot) of rekenen ze terug (aftrekken tot) en stemmen ze hun rijghandelingen op de getallen af door hun rekenstappen handig te structureren, gebruikmakend van geschikte lineaire of kardinale getalrelaties.
- 4 Leerlingen uit de groep Hoog lijken het meest te profiteren van de voordelen van rijgen, leerlingen uit de groep Midden het minst. Leerlingen uit de groep Laag kunnen ook behoorlijk rijgen, maar lopen achter in de formalisering en automatisering van de rijgprocedures.
- 5 Leerlingen zouden beter kunnen rijgen, als ze minder uit het hoofd en meer met pen en papier zouden rekenen. Ze zouden dan hun handelingen of tussenuitkomsten zo moeten leren opschrijven dat ze achteraf kunnen worden gecontroleerd. Dit geldt voor leerlingen uit alle vaardigheidsgroepen, ongeacht hoe goed ze al kunnen rijgen.
- 6 Zo bekwaam als leerlingen halverwege de basisschool rijgen, zo onhandig lossen ze aftrekproblemen en kale aftrekkingen splitsend en redenerend op. Veel leerlingen missen de kennis en instrumentele vaardigheden die nodig zijn om de elementaire procedures die ze correct uitvoeren op een hoger niveau te formaliseren en te automatiseren.

In alle drie de vaardigheidsgroepen hebben sommige leerlingen bovendien foutieve procedures ingeslepen als ze redenerend aftrekken, zoals het verwisselen van de eenheden bij splitsen en het hergroeperen bij wijze van compensatie.

Een bijkomend probleem is dat ze regelmatig splitsen of redeneren in contexten en met getallen die zich daar niet of minder goed voor lenen en dat ze uit het hoofd rekenen, met alle gevolgen van dien.

- 7 Dit alles betekent dat het gros van de leerlingen niet optimaal kan profiteren van de voordelen van splitsen en redeneren, omdat ze deze vormen van hoofdrekenen nog onvoldoende hebben ontwikkeld, geformaliseerd en geautomatiseerd. Leerlingen uit de groep Midden hebben daar het meeste last van, omdat ze regelmatig splitsen evenals de leerlingen uit de groep Laag die alle drie de hoofdrekenmethoden onvoldoende tot matig beheersen.

Concluderend stellen we vast, dat leraren en leerlingen het doel van flexibel hoofdrekenen maar gedeeltelijk realiseren. Veel leerlingen komen aan flexibel rijgen toe, maar stranden bij het gecombineerde gebruik van de meer vaste vormen (rijgen en splitsen) en de meer open (geheugenfeit en redeneren) vormen van hoofdrekenen. De huidige manier van leren hoofdrekenen werkt bovendien een zeer grote niveaudifferentiatie in de hand die het noodzakelijke maatwerk complex en moeilijk uitvoerbaar maakt.

13.5 Verbeterpunten

Onderzoekers, auteurs van methoden, toetsontwikkelaars en leraren staan voor de taak om het onderwijs beter te maken, dan het nu al is. In deze afsluitende paragraaf stellen we aspecten van leren hoofdrekenen aan de orde die naar onze mening kunnen en moeten worden verbeterd, opdat zoveel mogelijk leerlingen het doel van *flexibel hoofdrekenen* kunnen realiseren.

Onderzoekers en auteurs van rekenmethoden

De hiërarchische ordening van de rijg-, splits- en redeneeroplossingen heeft een ontwikkelingssequentie opgeleverd. Deze sequentie is gebaseerd op de beschikbare theoretische kennis en evaluatiegegevens over de begripsvorming van getallen en operaties. We beschouwen deze sequentie als een hypothetisch model van de ontwikkeling en de formalisering van rijgen, splitsen en redeneren.

De analyse van het repertoire aan rekenprocedures, het gebruikspatroon, het beheersingsniveau van de drie hoofdrekenmethoden én de gemaakte fouten hebben problemen aan het licht gebracht die de aandacht op een zestal verbeterpunten richten:

- 1 een betere afstemming van de leerlijn *Hoofdrekenen* op de leerlijn *Getallen en getalrelaties*;
- 2 explicieter en systematischer leren om adequaat gebruik te maken van functionele combinaties van aftrekstrategieën en rijgprocedures;
- 3 het redenerend leren aftrekken via afleiden, herleiden en transformeren beter aansluiten en afstemmen op de reconstructie en automatisering van de rekenfeiten onder de 20;
- 4 het leren splitsen meer verankeren in en afstemmen op het begrip van het positiesysteem en de opgedane ervaring met de voor- en nadelen van rijgen en redeneren;
- 5 strategisch leren aftrekken op basis van rijgen, splitsen en redeneren;
- 6 een schriftelijke rekentaal, die bij het bereikte niveau van denken en rekenen past en die inzichtelijk hoofdrekenen ondersteunt, systematischer ontwikkelen en helpen formaliseren.

Ad.1 Betere afstemming van de leerlijn Hoofdrekenen op de leerlijn Getallen en getalrelaties

Wat leerlingen van de getallen weten en begrijpen, bepaalt grotendeels op welk niveau ze in die periode inzichtelijk met deze getallen kunnen opereren. De geobserveerde vormen en niveaus van rijgen, splitsen en redeneren maken de wisselwerking goed zichtbaar tussen enerzijds de ontwikkeling van het *getalbegrip* en anderzijds het *begrip van aftrekken*.

De beschreven transformatie van de rijg-, splits- en redeneerhandelingen van het ene niveau naar het andere is hypothetisch. Het stoelt louter op de interpretatie van de geobserveerde oplossingen in het licht van de beschikbare theorie over het getalbegrip en het begrip van operaties. Het ligt nu voor de hand om *longitudinaal* te onderzoeken:

- of leerlingen inderdaad hun rijg-, splits- en redeneerprocedures ontwikkelen, zoals veronderstelt én
- hoe de transformatie van het ene niveau naar het andere samenhangt met herkenbare transformaties op het niveau van het *getalbegrip* en de *automatisering* van telvaardigheden, rekenfeiten en basisoperaties die bij dit niveau van getalbegrip horen.

De kernkwestie is hoe de voortgang van de leerlingen in het begrip en de mentale voorstelling van gehele getallen (*hoeveelheid*, *uitspraak* en *notatie* van de getallen en de relatie tussen deze drie componenten) zich verhoudt tot de voortgang in de ontwikkeling van telprocedures, de transformatie van tellen in vormen van optellen en aftrekken en de geleidelijke formalisering van deze optel- en aftrekhandelingen.

Auteurs van rekenmethoden kunnen ondertussen al de huidige leergangen vanuit deze invalshoek doorlichten en activiteiten, taken en opdrachten herschikken, aanpassen en verrijken om zo de leerlingen beter in staat te stellen de sprong van het ene niveau naar het andere te maken.

Wat het rijgen betreft, zou prioriteit moeten worden gegeven aan:

- de expliciete en systematische transformatie van *alles tellen* in *dubbel tellen* via *verkort tellen* met gesymboliseerde telstappen;
- tellen en meten met eenheden van tien en één en het afbeelden van deze handelingen als middel om handelingen en relaties tussen hoeveelheden of grootheden ‘op lijn’ af te beelden door getallen aan elkaar te knopen (Freudenthal, 1984; Gravemeijer, 2000);
- de systematische transformatie van *dubbel tellen* in *rijgen met sprongen* en de transformatie van de twee vormen van *lineair-decimaal* rijgen in *structurerend* en ten slotte *gestandaardiseerd* rijgen (zie hoofdstuk 8).

Ad.2 Expliciet en systematisch leren om adequaat gebruik te maken van functionele combinaties van aftrekstrategieën en rijgprocedures

De resultaten tonen aan dat het gros van de leerlingen, halverwege jaargroep 5, strategisch rijgt (zie hoofdstuk 7). Veel leerlingen wisselen van strategie (aftrekken, optellen tot of aftrekken tot) en structureren hun rijghandelingen op verschillende manieren en niveaus, afhankelijk van de context en de getallen van de opgave.

We hebben geconstateerd dat leerlingen aan de ene kant door de context en aan de andere kant door de getallen worden aangetrokken. Ook hebben we vier patronen in de gebruiksfrequentie van aftrekken, optellen tot en aftrekken tot ontdekt:

- Leerlingen ontwikkelen een zekere voorkeur voor aanvullen in situaties waarin er sprake is van aanvullen, verschil bepalen en part bepalen. Waarschijnlijk is dit, omdat ze doortellen en optellen tot beter hebben geautomatiseerd dan terugtellen en aftrekken tot (standaardaanpak van duidelijk herkenbare type problemen).
- Sommige leerlingen negeren bewust de beschrijving van de handeling (of relatie) en de gestelde vraag en tellen op in plaats van terug te rekenen, als ze een verschil of een part moeten uitrekenen (afwijkend op de tekst en de vraag reageren).

- De meeste leerlingen lossen in de regel kale aftrekkingen met ‘gewone’ getallen eerder op met aftrekhandelingen dan via aanvullend optellen (invloed van de sommentaal – het minteken).
- Leerlingen laten ten slotte de context los en trekken af, als ze inschatten dat ze de uit te voeren aftrekhandelingen aankunnen (automatisering van aftrekoperaties).

Dit alles wijst erop dat flexibel rijgen de basis legt voor flexibel hoofdrekenen. Nadenkend over de verschillende manieren waarop een probleem in de groep is geïnterpreteerd, geschematiseerd en uitgerekend, komen de betrokkenen leerlingen erachter dat de combinatie van een bepaalde rijgprocedure met één van de drie mogelijke aftrekstrategieën meer of minder adequaat is, afhankelijk van de context en de getallen. Ze begrijpen dat het loont om eerst even na te denken voor je iets uitrekent en ontwikkelen al doende de houding die nodig is om (later) adequaat te leren kiezen tussen rijgen, splitsen en redeneren.

Bovenstaande aanwijzingen sporen aan om de aantrekkingskracht van de context en de getallen systematischer en longitudinaal te onderzoeken. Sets opgaven kunnen worden samengesteld bestaande uit (a) kale aftrekkingen én (b) aftrekproblemen van het type aanvullen, verschil bepalen, part bepalen en afhalen waarin de getallen systematisch variëren. Drie groepen leerlingen zouden moeten worden gevormd (Laag, Midden en Hoog) om vast te kunnen stellen in welke mate de verworven rekenvaardigheid een rol speelt, onder ander de gememoriseerde rekenfeiten, geautomatiseerde basisoperaties en de beheersing van aanvullen, aftrekken en aftrekken tot.

De geobserveerde oplossingswijzen moeten inzicht geven in:

- de wijze waarop leerlingen in de loop van jaargroep 4 en 5 ‘regels’ ontwikkelen voor het strategische gebruik van de negen alternatieve rijgschema’s die we aan de hand van onze observaties hebben onderscheiden én
- het type getalrelaties dat ze gebruiken om de getallen ‘lineair’ en ‘kardinaal’ aan elkaar te knopen (zie hoofdstuk 7 en 8).

De foutenanalyse heeft aan het licht gebracht dat sommige leerlingen uit de groep Laag zich nog regelmatig vergissen, als ze rijgend aanvullen, omdat ze aanvullen met optellen verwarren. Dergelijke fouten kunnen worden voorkomen (en tijdig herkend), als de leraar regelmatig korte gesprekken met de leerlingen houdt rond de verschillende rijgschema’s die in de groep zijn gebruikt om een bepaald aftrekprobleem of een bepaalde kale aftrekking uit te rekenen. Leerlingen zullen dan de gewoonte ontwikkelen om de eigen aanpak en oplossing op een getallijn af te beelden en vanuit deze representatie hun voorkeur uitleggen en verantwoorden. Als de gebruikte alternatieve rekenschema’s op eenzelfde lijn worden afgebeeld, leren ze ‘strategisch’ en ‘getalsmatig’ over overeenkomsten en verschillen na te denken en begrijpen ze al doende beter hoe ‘aanvullen’ zich tot ‘optellen’ en ‘aftrekken’ verhoudt, en hoe deze relaties kunnen worden benut om zo gemakkelijk mogelijk af te trekken.

Ad.3 Beter aansluiten en afstemmen van redenerend aftrekken (afleiden, herleiden en transformeren) op de reconstructie en automatisering van de rekenfeiten onder de 20

Leerlingen reconstrueren tegenwoordig de optellingen en aftrekkingen tot onder de 20 grotendeels via het afsplitsen van de getallen, handig gebruikmakend van de dubbel-, vijf- en tienstructuur van de getallen:

- 6 + 6 via
 $(5 + 1) + (5 + 1) = (5 + 5) + (1 + 1) = 10 + 2$, dus 12.
- 6 + 7 via
 $(5 + 1) + (5 + 2) = (5 + 5) + (1 + 2) = 10 + 3$, dus 13.
- 6 + 7 via
 $6 + 6 = 12 \rightarrow 7$ is één meer dan 6, dan is het één meer dan 12, is 13.

- $12 - 7$ via
Ik weet 12 eraf 6 is 6 ; 7 is één meer dan 6 , dan houd ik één minder over, 5 in plaats van 6 .
- $16 - 9$ via
 $16 - 10 = 6$; 9 is één minder dan 10 , dan komt er één bij, is 7 .
- $11 - 8$ via
Ik weet $10 - 8 = 2$; 11 is één meer, dan is het één meer, 3 in plaats van 2 .
- $12 - 8$ via
 $12 - 8 = 4$ want $8 + 4 = 12$.

Auteurs van methoden zouden de lijn van structurerend aftrekken onder de 20 moeten doortrekken om onbekende aftrekfeiten onder de 100 met behulp van dezelfde getalstructuren en volgens dezelfde typen redenering te helpen reconstrueren, zoals hieronder aangegeven.

$16 - 9$ via $16 - 10 = 6$ $10 = 9 + 1 \rightarrow 6 + 1 = 7$	$67 - 29$ via $67 - 30 = 37$ $30 = 29 + 1 \rightarrow 37 + 1 = 38$
$11 - 8$ via $10 - 8 = 2$ $11 = 10 + 1 \rightarrow 2 + 1 = 3$	$51 - 48$ via $50 - 48 = 2$ $51 = 50 + 1 \rightarrow 2 + 1 = 3$
$14 - 6$ via $14 - 4 = 10$ $6 = 4 + 2 \rightarrow 10 - 2 = 8$	$84 - 46$ via
$12 - 8 = 4$ want $8 + 4 = 12$	

Uitgaande van de voorbeeldoplossingen, die in de in hoofdstuk 11 gepresenteerde Kwantiwijzer voor leerkrachten staan (Van de Berg e.a., 1994), zou moeten worden onderzocht hoe leerlingen het afsplitsen en compenseren met getallen onder de 20 op een natuurlijke manier kunnen transformeren tot de elementaire vormen van afleiden, herleiden en transformeren onder de 100 .

Waar het om gaat is activiteiten, taken en opdrachten te ontwerpen en te organiseren die gericht zijn op

- het in contextsituaties, flexibel samenstellen en structureren van getallen tussen 19 en 99 om een gesteld doel te bereiken;
- het leren gebruikmaken van deze manier van samenstellen en structureren om onbekende optellingen en aftrekkingen te reconstrueren en
- de ontwikkeling van regels om dat systematisch en steeds meer puur getalsmatig te doen.

Een kernprobleem bij redeneren onder de 100 is, dat veel leerlingen zich laten verblinden door het optelfeit dat achter de aftrekking van de opgave schuilgaat. Ze proberen dan het onbekende getal van deze aftrekking via afsplitsen te vinden, maar raken bij compenseren in de war, omdat de redenering zo abstract is.

Auteurs van methoden zouden daarom regelmatig gesprekken moeten inlassen waarin de hele groep zich bezint op de vraag hoe adequaat redeneren in een bepaalde situatie is. Waar het om gaat is, dat leerlingen voor- en nadelen onder woorden brengen en toelichten en deze in relatie brengen met voor- en nadelen van oplossingen waarin rijgen en splitsen in plaats van redeneren wordt toegepast.

Ad.4 Het leren splitsen meer verankeren in en afstemmen op het begrip van het positiesysteem en de opgedane ervaring met de voor- en nadelen van rijgen en redeneren

De geobserveerde splitsoplossingen wijzen erop dat splitsend aftrekken enerzijds vanzelfsprekend is omdat het aansluit bij het weghalen van bundels van tien objecten en losse objecten en anderzijds gemakkelijk tot structurele fouten leidt, als de leraar niet gespitst is op de misconcepties en foutieve rekenhandelingen die leerlingen bij een tekort aan eenheden kunnen maken.

Het gevonden patroon in de geleidelijke transformatie van samengesteld aftrekken tot kolomsgewijs aftrekken suggereert dat leerlingen inzichtelijk zouden kunnen leren splitsen als ze van het begin af aan en van het ene niveau naar het andere, zich telkens weer op het probleem van het tekort aan eenheden zouden concentreren.

De hiërarchische ordening van de splitsoplossingen heeft de volgende tendens aan het licht gebracht:

- vanuit hun begrip van tientalligheid, tellen met tien en lossen en aftrekken gezien als afhalen, kunnen leerlingen eerst op het idee komen om rijgen met splitsen te combineren:
42 – 26 via
40 – 20 = 20
2 – 6 kan niet
20 + 2 = 22
22 – 6 = 20 – 4 = 16
- Deze mengvorm wordt overbodig, als de leerlingen een tekort aan eenheden met een negatief getal kunnen symboliseren (2 – 6 is 4 tekort: – 4) en begrijpen waarom ze dit tekort rechtstreeks van de resterende tientallen kunnen aftrekken:
42 – 26 via aftrekken met tekorten
40 – 20 = 20
2 – 6 is 4 tekort → – 4
20 – 4 = 16
- Deze transformatie van de mengvorm splitsen-rijgen tot aftrekken met tekorten kan de leerlingen dan op het idee brengen om het grootste getal zodanig af te splitsen dat ze wel de eenheden kunnen aftrekken – de handigheid die we ‘achteraf lenen’ hebben genoemd:
42 – 26 via achteraf lenen
40 – 20 = 20
2 – 6 kan niet
Ik kan wel 12 – 6 uitrekenen, dat is 6
Ik houd nog 3 tientallen over
30 – 20 = 10
6 + 10 = 16

De vraag komt dan op of het gros van de leerlingen langs deze lijn zou kunnen leren splitsen en welk type activiteiten, taken en opdrachten de leerlingen in staat stellen om de kennis en vaardigheden te verwerven die nodig is om het tekort aan eenheden op een hoger niveau van begrip van getallen en aftrekken op te lossen.

De uiteindelijke vraag is hoe vanzelfsprekend het dan voor de leerlingen is om ‘achteraf’ lenen in ‘vooraf’ lenen te veranderen door de aftrekking direct af te splitsen:

42 – 26 via afsplitsen en ‘vooraf lenen’
42 – 26 is evenveel als (30 + 12) – (20 + 6) en dat is evenveel als (30 – 20) + (12 – 6)
12 – 6 = 6
30 – 20 = 10
6 + 10 = 16

Onder elkaar:

42 – 26 via afsplitsen en ‘vooraf lenen’ onder elkaar: $(30 + 12) - (20 + 6) = (12 - 6) + (30 - 20)$

$$\begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ \hline 20 & 6 \end{array} - \rightarrow \begin{array}{r|l} 30 & 12 \\ \hline 20 & 6 \end{array} -$$
$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline 10 & 6 \end{array}$$

Ad.5 Strategisch leren aftrekken op basis van rijgen, splitsen en redeneren

Bij punt 2 bevelen we aan om de leerlingen explicieter en systematischer te leren adequaat gebruik te maken van de geleerde rijgschema's. We maakten een vergelijkbare aanbeveling bij punt 3 met betrekking tot het adequate gebruik van afleiden, herleiden en transformeren. De geobserveerde fouten wijzen erop dat leerlingen regelmatig in de problemen raken omdat ze een strategie volgen en een hoofdrekenmethode gebruiken die niet goed of helemaal niet geschikt is om de getallen van de betreffende aftreksituatie te bewerken.

We zijn van mening dat leerlingen, van het begin af aan, moeten leren om functioneel en pragmatisch te rekenen. Dit houdt in dat ze:

- zich moeten realiseren dat rijgen altijd werkt, maar ook omslachtig kan zijn en dit met voorbeelden kunnen aantonen;
- beseffen dat redeneren vooral aantrekkelijk is als ze direct op het oog kunnen zien hoe de ‘som’ van de opgave via een andere opgave die er sterk op lijkt kan worden opgelost en daar voorbeelden van geven;
- ervan uitgaan dat splitsen vooral aantrekkelijk is als er voldoende eenheden zijn en als aftrekken met tekorten voor de hand ligt en gemakkelijk kan worden uitgevoerd en dit met voorbeelden illustreren.

Onderzocht zou moeten worden of leraren deze houding bij leerlingen in de loop van jaargroep 4 en 5 kunnen ontwikkelen en of de leerlingen zich hierdoor beter bewust worden van de voordelen van rijgen, splitsen en redeneren en hierdoor adequater rijgen met splitsen en redeneren leren combineren.

Ad.6 Systematische ontwikkeling en formalisering van een passende schriftelijke rekentaal die het rekenen met het hoofd ondersteunt

De analyse die leerlingen bij rijgen, splitsen en redeneren maken, heeft erop gewezen dat leerlingen heel vaak in de problemen komen, omdat ze uit het hoofd rekenen. Het werkt slordigheidsfouten in de hand, omdat het werkgeheugen zwaar wordt belast en ontnemt bovendien de mogelijkheid om achteraf te controleren of de uitgevoerde rekenhandelingen en de gevonden tussenuitkomsten wel kloppen.

Dat leerlingen zichzelf in de problemen brengen door alles uit het hoofd te willen bedenken en/of uit te rekenen is ook in andere onderzoekscontexten geconstateerd (Rademakers e.a., 2004; Van de Heuvel-Panhuizen, 2005). Dit betekent dat leerlingen hun houding moeten veranderen en dat de auteurs van methoden dit in de hand moeten werken door, van het begin af aan, de leerlingen te leren een geschikte rekentaal te ontwikkelen om hun rekenhandeling te symboliseren en deze te helpen formaliseren bij de overgang van het niveau van rijgen, splitsen en redeneren naar het volgende niveau. Hoe dat kan moeten langlopende experimenten in de klas uitwijzen.

Toetsontwikkelaars

Leraren hebben toetsen nodig:

- om vast te kunnen stellen welke specifieke kennis en vaardigheden individuele leerlingen en groepen van leerlingen gedurende een bepaalde periode hebben ontwikkeld;
- om te kunnen observeren hoe ze deze kennis en vaardigheden gebruiken om schooltaken en

- problemen uit het leven van alledag op te lossen;
- om, op basis van deze vorderingen, vast te kunnen stellen, op welk niveau ze op korte termijn kunnen leren denken en rekenen;
- en om activiteiten te selecteren en te plannen die deze niveauverhoging bevorderen.

De sectie rekenen-wiskunde van Cito beschouwt de geconstrueerde sequentie als voorlopige beschrijving van de stappen die leerlingen maken bij leren hoofdrekenen onder de 100. Deze sequentie zal via de reguliere ontwikkelings- en onderzoeksactiviteiten van de sectie worden getoetst, aangescherpt en gewijzigd. Kale opgaven en contextopgaven, die een beroep doen op de getalkennis en de tel- en rekenvaardigheden die bij een bepaald niveau van rijgen, splitsen en redeneren horen, worden ontworpen. Op basis van de antwoorden en oplossingen van de grote groepen leerlingen die we toetsen en/of volgen, kunnen we dan onze veronderstellingen met betrekking tot de voorwaarden van de opeenvolgende niveauverhogingen controleren, nader specificeren en zonodig wijzigingen. De oplossingswijzen zullen daarnaast aanvullende informatie geven over hoe leerlingen op hun niveau rekenen, dat wil zeggen welke getalrelaties, rekenregels en typen redeneringen ze zoal gebruiken.

Dit moet uiteindelijk leiden tot een hiërarchisch opgebouwd systeem van reeksen, die het leerlandschap én de leerlijn van de leerlingen in het domein van de *Getallen en de operaties* in kaart brengen.

Op basis van deze domeinbeschrijving en voorbeeldoplossingen kunnen ten slotte sets diagnostische opgaven worden ontwikkeld die leraren voor de planning en inrichting van maatwerk kunnen gebruiken, ter verbetering van het instrumentarium dat nu ter beschikking staat (Kraemer, 2008).

Leraren

Leraren kunnen pas structureel hun hoofdrekenonderwijs verbeteren, naarmate onderzoekers en auteurs van methoden uitgewerkte voorbeelden geven van essentiële veranderingen. Dit betekent niet dat zij voorlopig moeten blijven onderwijzen zoals ze dat nu doen. Het tegendeel is waar. Ze kunnen op vier fronten initiatieven nemen die de huidige leercondities kunnen verbeteren. Ze kunnen:

- 1 gerichter aandacht besteden aan de kennis en vaardigheden die een leerling moet verwerven om de sprong naar een volgend niveau van rijgen, splitsen en redeneren te kunnen maken (*continue gerichtheid voorwaardelijke kennis en vaardigheden*);
- 2 verschillende typen aftrekproblemen en kale aftrekkingen afwisselend gebruiken om de leerlingen rijgen, splitsen en redeneren te leren gebruiken op grond van inzicht in de voor- en nadelen van deze hoofdrekenmethoden (*leren adequaat gebruik te maken van rijgen, splitsen en redeneren*);
- 3 de nadruk afwisselend verschuiven van de formalisering naar de automatisering en het flexibel gebruik van de geleerde hoofdrekenmethoden en -procedures (*cyclische verdeling van de aandacht voor formaliseren, automatiseren en flexibiliseren*);
- 4 de leerlingen in de loop van dit proces, systematisch helpen om een schriftelijke rekentaal te ontwikkelen en te leren gebruiken die bij het bereikte niveau van denken en rekenen past (*systematische ontwikkeling van een schriftelijke rekentaal*).

Ad. 1 Continue gerichtheid voorwaardelijke kennis en vaardigheden

De foutenanalyse heeft uitgewezen dat leerlingen uit alle drie de vaardigheidsgroepen regelmatig in de problemen raken omdat ze op een niveau proberen te rekenen dat (veel) hoger ligt dan het niveau waarop ze inzichtelijk met de getallen kunnen handelen. Het schoolvoorbeeld daarvan is enerzijds het verwisselen van de eenheden en het foutief bewerken van de tekorten

bij splitsend aftrekken en anderzijds de uiteenlopende compenseerfouten bij afleidend aftrekken.

Leraren kunnen nu al, met de huidige leergangen van hun handleiding en de taken en opdrachten van de leerlingboeken betekenisvoller en effectiever lesgeven door:

- regelmatig korte gesprekken met individuele leerlingen en/of groepen leerlingen te houden om erachter te komen hoe ze over de getallen en over aftrekken denken en hoe ze op basis van deze kennis en hun eigen getalsysteem zoal aftrekken (*observeren*);
- op basis van deze informatie vast te stellen op welk niveau ze zoal rijgen, splitsen en redeneren en welke eerstvolgende sprong ze vanaf dit niveau kunnen maken (*diagnosticeren*);
- activiteiten uit hun handleiding en de leerlingboeken te selecteren die deze sprong mogelijk maken (*voorwaardelijke kennis en vaardigheden als eerstvolgende tussendoel*).

Cito heeft een nieuw instrument uitgegeven dat leraren uit jaargroep 3, 4 en 5 kunnen gebruiken om het maatwerk in het domein van de Getallen en de operaties onder de 100/1000 op deze manier te organiseren (Kraemer, 2008).

Ad.2 Leren adequaat gebruik te maken van rijgen, splitsen en redeneren

Een tweede bron van problemen is dat leerlingen uit de groepen Laag en Midden regelmatig splitsen of redeneren terwijl rijgen, gelet op de context en/of de getallen, gemakkelijker, efficiënter en daarom productiever is. Aanvullend splitsen en afleiden zijn daar schoolvoorbeelden van. Leerlingen raken bij splitsend aanvullen in de war, als ze meer dan 10 eenheden krijgen en bij aanvullend afleiden, omdat ze niet begrijpen hoe compenseren bij aanvullen werkt.

Leraren kunnen nu dergelijke problemen voorkomen door afwissellende typen aftrekproblemen en kale aftrekkingen aan de orde te stellen, de leerlingen te vragen alternatieve oplossingen voor deze opgaven te inventariseren en gezamenlijk te onderzoeken wat de voor- en nadelen zijn van deze manieren van rekenen. Waar het om gaat is dat de leerlingen functioneel leren gebruikmaken van rijgen, splitsen en redeneren, dat wil zeggen in situaties waarin het loont om de ene methode in plaats van de andere te gebruiken (zie verbeterpunt 5 voor onderzoekers en auteurs van methoden).

Ad.3 Cyclische verdeling van de aandacht voor formaliseren, automatiseren en flexibiliseren

De foutenanalyses hebben ook aangetoond dat flexibel hoofdrekenen voorlopig niet loont, omdat teveel leerlingen splitsen en redeneren matig of onvoldoende beheersen. Dit betekent dat leraren telkens de prioriteit moeten geven aan het verhogen van het begrip- en rekenniveau van de leerlingen alvorens zich op de automatisering en het flexibel gebruik te richten.

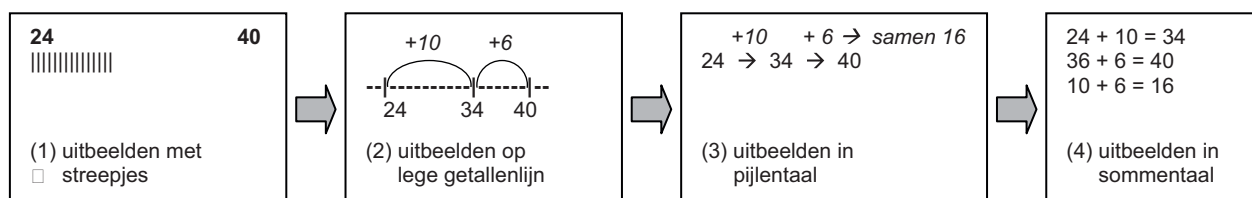
Leraren zouden, afhankelijk van de voortgang in het leerproces, telkens het accent moeten verleggen:

- van activiteiten en opdrachten die gericht zijn op het verhogen van het niveau van denken en rekenen;
- naar taken en opdrachten die de *automatisering van de nieuwe rekenprocedure* bevorderen alsmede het onderhoud van *voorwaardelijke vaardigheden, getalrelaties en basisoperaties én*
- naar activiteiten die bedoeld zijn om de leerlingen te helpen de nieuw geleerde procedures op een *inzichtelijke manier te gebruiken* (zie verbeterpunt 2).

Ad.4 Systematische ontwikkeling van een adequate schriftelijke rekentaal

Onderzoekers en auteurs van methoden moeten op korte termijn richtlijnen geven over de wijze waarop leerlingen, bij de reconstructie van het systeem van gehele getallen kleiner dan 100 en de bewerkingen met deze getallen, een rekentaal kunnen ontwikkelen die bij de opeenvolgende niveaus van denken en rekenen past. Leraren kunnen echter in de tussentijd de gewoonte

ontwikkelen om leerlingen te vragen hun rekenhandelingen zo op het bord uit te beelden dat groepsleden kunnen begrijpen hoe zij gedacht en gerekend hebben. Omdat leerlingen verschillend uitbeelden, afhankelijk van de gebruikte hoofdrekenmethode en het niveau waarop ze rekenen, genereren ze verschillende (typen) taaluitdrukkingen. Leraren kunnen dan korte activiteiten inlassen om deze taaluitdrukkingen onder de loep te nemen en zodanig te perfectioneren en te formaliseren, dat elke deelnemer over een taal beschikt die bij zijn niveau van denken en rekenen past. Voorbeelden daarvan zijn de transformatie van *doortellen met telstreepjes* in *rijgen met sprongen op een getallenlijn* en van *rijgen met sprongen* in *aftrekken in pijlentaal* of *sommentaal*:



Literatuur

Literatuur

- Beishuizen, M. (1983). Invloeden van leermiddelen op de uitvoering van rekenhandelingen. In: G. de Zeeuw, W. Hofstee & J. Vastenbouw (red.). *Funderend onderzoek van het onderwijs en onderwijsleerprocessen – Bijdrage ORD 1983*. Lisse, Swets & Zeitlinger, 45 – 54.
- Beishuizen, M. (1985). Vervolgonderzoek: invloeden van leermiddelen op de uitvoering van rekenhandelingen. In: S. Dijkstra & P. Span (red.). *Leerprocessen en instructie. Bijdrage ORD 1985*. Lisse, Swets & Zeitlinger, 131 – 144.
- Beishuizen, M. & F. van Mulken (1988). Twee veelgebruikte oplossingsmanieren bij hoofdrekenen. *Panama-post*, 6 (3), 32 – 36.
- Beishuizen, M. (1992). De lege getallenlijn als (sober) mentaal model. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 11 (3), 16 – 19.
- Beishuizen, M. en T. Klein (1993). Zwakke rekenaars en de lege getallenlijn. In: M. Dolk, H. van Luit en E. te Woerd (red.). *Speciaal rekenen – verslag van de twaalfde Panama najaarsconferentie*. Utrecht, Freudenthal Instituut, 101 – 111.
- Beishuizen, M. (1997). Development of mathematical strategies and procedures up to 100. In: M. Beishuizen, K.P. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (Eds). *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures*. Utrecht, Freudenthal Institute, 127 – 162.
- Berg, W. van den, D.A.A. van Eerde en S. Lit (1994). *Kwantiwijzer voor leerkrachten. Werkboek 8, aftrekken onder de 100*. Tilburg, Zwijssen.
- Blakenburg, K. (1988). Relativering van hoofdrekenen. *Panama-post*, 6 (3), 27 – 28.
- Boer, C. van den (2003). *Als je begrijpt wat ik bedoel. Een zoektocht naar verklaringen voor achterblijvende prestaties van allochtone leerlingen in het wiskundeonderwijs* (dissertatie). Utrecht, CD β Press.
- Cockcroft, W.H. (1982). *Mathematics counts* (report). London, HMSO.
- Corte, E. & L. Verschaffel (1984). Redactie-opgaven in Vlaamse rekenmethoden voor de eerste klas. In: E. de Moor (red.). *Panama Cursusboek 2*. Utrecht, SOL/OW&OC.
- Corte, E. & L. Verschaffel (1885). Werken met eenvoudige rekenvraagstukjes in de eerste klas (red.). *Panama Cursusboek 3*. Utrecht, SOL/OW&OC.
- Corte, E. & Verschaffel, L. (1887). The effect of semantic structure on first graders' solution strategies of elementary addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 363 – 381.

Dekker, A., H. ter Heege & A. Treffers (1982). *Cijferend vermenigvuldigen en delen volgens Wiskobas*. Utrecht, OW&OC.

Eerde, D.A.A. van, (1996). *Kwantiwijzer. Diagnostiek van het reken-wiskundeonderwijs* (dissertatie). Tilburg, Zwijssen.

Eerde, D. van, M. Hajer, T. Koole & J. Prenger (2002). Betekenisconstructie in de wiskundeles. De samenhang tussen interactief wiskunde- en taalonderwijs. *Pedagogiek*, 22 (2), 134 – 147.

Freudenthal, H. (1984). *Didactische fenomenologie van wiskundige structuren*. Utrecht, OW&OC.

Freudenthal, H. (1987). Theorievorming bij het wiskundeonderwijs. Geraamte en gereedschap. *Panama-post*, 5 (3), 4 – 15.

Freudenthal, H. (1990a). Wiskunde fenomenologisch. *Panama-post*, 8 (2), 33 – 40.

Freudenthal, H. (1990b). Wiskunde fenomenologisch (aflevering 2). *Panama-post*, 8 (3), 11 – 20.

Freudenthal, H. (1990c). Wiskunde fenomenologisch (aflevering 3, slot). *Panama-post*, 8 (4), 51 – 61.

Fuson, K.C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. New York, Springer-Verlag.

Fuson, K.C. (1992). Research on whole numbers addition and subtraction. In: D. Grouws (ed.). *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning*. New York, Macmillan, 243 – 275.

Fuson, K.C. en S.T. Smith (1997). Supporting multiple 2-digit conceptual structures and calculation methods in the classroom: issues of conceptual supports, instructional design, and language. In: M. Beishuizen, K.P. Gravemeijer & E.C.D.M. van Lieshout (Eds.). *The role of contexts and models in the development of mathematical strategies and procedures*. Utrecht, Freudenthal Instituut, 163 – 198.

Gravemeijer, K.P.E. (1994). (dissertatie). Utrecht, Freudenthal Instituut.

Gravemeijer, K. (1998). Symboliseren en modelleren als wiskundige activiteit. In: N. Boswinkel & M. Dolk (red.). *Over rekenen gesproken – taal in/en rekenen*. 35 – 51.

Gravemeijer, K.P.E. (2000). Meten als basis voor het rekenen met de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 18 (3), 37 – 46.

Gravemeijer, K. (2003a). Didactisch gebruik van de lege getallenlijn, Een persoonlijk perspectief. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 21 (2), 11 – 23.

Gravemeijer, K. (2003b). Betekenisvol Rekenen. *Willem Bartjens*, 22 (4), 5 – 8.

Gravemeijer, K.P.E. en D.A.A. van Eerde (2004). Verschil maken. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 23 (1), 3 – 15.

Groenewegen, J.K.A. en K.P.E. Gravemeijer (1988). *Rekenen en Wiskunde, Achtergronden programma-Ontwikkeling project OSM. Het leren van de basisautomatismen voor optellen en aftrekken*. Rotterdam, Project Onderwijs en Sociaal Milieu.

- Harskamp, E.G. & C.J.M. Suhre (1995). *Hoofdrekenen in het speciaal onderwijs*. Groningen: GION.
- Heijden, M.K. van der (1988). Onderwijs in handig rekenen – wanneer, aan wie en hoe? Enkele kantekeningen bij de ‘Proeve...’(1) en (2). *Panama-post*, 6 (3), 29 – 31.
- Heijden, M.K. van der & M. Beishuizen (1986). Rekenmiddelen en hoofdrekenen. *Panama-post*, 4, 25 – 29.
- Heijden, M.K. van der (1993). *Consistentie van aanpakgedrag – een procesdiagnostisch onderzoek naar acht aspecten van hoofdrekenen* (dissertatie). Lisse, Swets & Zeitlinger.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den, K. Buys & A. Treffers (red.) (2000). *Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen. Bovenbouw Basisschool*. Groningen, Wolters-Noordhoff.
- Heuvel-Panhuizen, M. van den (2005). Twee ‘didactikids’ over de lege getallenlijn. In: H. ter Heege, T. Goris, R. Keizer & L. Wesker (red.), *Freudenthal 100*. Utrecht, Freudenthal Instituut.
- Hiele, P.M. (1973). *Begrip en inzicht*. Purmerend, Muusses.
- Hoogenberg, E. & E. Paardekoper (1995). *Strategiegebruik en getalkenmerken bij redactiesommen en contextopgaven tot 20 en 100* (doctoraalscriptie). Leiden.
- Huitema, S. (1991). Meer hoofdrekenen en minder cijferen. *Willem Bartjens*, 11 (1), 4 – 8.
- Janssen, J., F. Scheltens & J.M. Kraemer (2007). *Leerling- en Onderwijsvolgsysteem. Handleiding groep 5*. Arnhem, Cito.
- Klein, A.S. (1998). *Flexibilization of mental arithmetic strategies on a different knowledge base: the empty number line in a realistic versus gradual program design* (dissertatie). Utrecht, CD-β Press / Freudenthal Insitituut.
- Klein, A.S. & M. Beishuizen (1994). Flexibilisering van rekenstrategieën op een verschillende kennisbasis. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 13 (1), 32 – 38.
- Kraemer, J.M., J. Janssen, F. van der Schoot & B. Hemker (2005). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 4. Uitkomsten van de vierde peiling in 2003*. PPON-reeks nr. 31. Arnhem, Cito.
- Kraemer, J.M. (1996). Aanknopingspunten voor de versterking van het aanvankelijk rekenen in LOM- en MLK-scholen (2). *Panama-post*, 14 (2), 3 – 16.
- Luit, J.E.H., van (1988). Naar een verfijning van de ‘Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool’ (2) ten behoeve van het speciaal onderwijs. *Panama-post*, 6 (3), 23 – 26.
- Menne, J.J.M. (2001). *Met sprongen vooruit. Een productief oefenprogramma voor zwakke rekenaars in het getallengebied tot 100 – een onderwijsexperiment* (dissertatie). Utrecht, Freudenthal instituut.
- Menne, J.J.M. (2004). Geschiedenis van de lege getallenlijn. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 20 (1), 3 – 14.

Mulken, F. van (1992). *Hoofdrekenen en strategisch handelen. Het gevarieerd gebruik van twee grondvormen van optellen en aftrekken tot honderd* (dissertatie). Leiden.

Noteboom, A., F. van der Schoot, J. Janssen & N. Veldhuizen (2000). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs halverwege de basisschool 3. Uitkomsten van de derde peiling in 1997*. PPON-reeks nr. 15. Arnhem, Cito.

N.C.T.M (1980). *An agenda for action. Recommendations for school mathematics of the 1980's*. Reston, N.C.T.M.

Prenger, J. (2005). *Taal telt! Een onderzoek naar de rol van taalvaardigheid en tekstbegrip in het realistisch wiskundeonderwijs* (dissertatie). Rijksuniversiteit Groningen.

Prenger, J. (2007) Met taal kun je rekenen. De rol van taalvaardigheid en tekstbegrip bij het oplossen van een wiskundeopgave. *Volgens Bartjens... Tijdschrift voor reken-wiskundeonderwijs*, jaargang 26, mei 2007, 4 – 7.

Rademakers, G., C. van Putten, M. Beishuizen en J. Janssen (2004). Traditionele en realistische algoritmen bij het oplossen van deelsommen in groep 8. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 23 (4), 3 – 7.

Steffe, L.P., E. von Glasersfeld, J. Richards & P. Cobb (1983). *Children's counting types. Philosophy, theory and application*. New York: Praeger Publishers.

Tal-team (1999). *Jonge kinderen leren rekenen. Tussendoelen Annex Leerlijnen. Hele getallen. Onderbouw Basisschool*. Groningen, Wolters-Noordhoff.

Treffers, A. (1983). Geïntegreerd cijferen volgens progressieve schematisering. *Pedagogische Studiën*, 60, 351 – 362.

Treffers, A. en E. de Moor (1984a). *10 voor de basisvorming rekenen-wiskunde. Op weg naar een nationaal plan voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool en het gebruik van de computer daarbinnen*. Utrecht: OW&OC/Panama/SOL.

Treffers, A., E. Feys en E. de Moor (1987). Proeve van een nationaal program voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool (1). *Panama-post*, 6 (1), 7 – 28.

Treffers, A. (1989). *Het voorkomen van ongecijferdheid op de basisschool* (oratie). Utrecht, OW&OC.

Treffers, A. en E. de Moor (1990). *Proeve van een nationaal program voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 2. Basisvaardigheden en cijferen*. Tilburg: Zwijssen.

Treffers, A., (1991). Hoofdrekenen toen en nu. In: M. Dolk & E. Feijs, (Eds). *Panamacursusboek 9: Deskundigheid*. Utrecht: OW&OC, 41 – 47.

Treffers A. en A. Veltman (1994). Relatie-boogje als brug tussen bewerkingen. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 12, 3, 11 – 14.

Treffers A. en A. Veltman (1996). Onder nul: rekenen met negatieve leeftijdsgetallen. *Willem Bartjens*, 15 (4), 38 – 41.

Treffers, A., (1999). Rekenen tot twintig (1), *Willem Bartjens*, 18 (4), 4 – 9.

Veldhuis, E.C. (1981). *Deelleergang cijferend optellen en aftrekken, volgens het principe van progressieve schematisering, gegeven in het kader van remedial teaching van vier kinderen in het buitengewoon onderwijs* (doctoraalscriptie). Utrecht, IPAW.

Veltman, A. (1993). *Van het begin en van het eind: ontwikkelingsonderzoek naar het rekenen tot 100 op de lege-getallenlijn* (doctoraalscriptie). Utrecht, Faculteit Sociale Wetenschappen.

Verschaffel, L., E. de Corte, E. Struyf & I. Gielen (1995). Handig en flexibel hoofdrekenen in het getalgebied 1-20. *Tijdschrift voor nascholing en onderzoek van het reken-wiskundeonderwijs*, 13 (3), 28 – 36.

Vuurmans, A.C. (red.) (1991). *Rekenen tot honderd. Handleiding*. 's-Hertogenbosch, Katholiek Pedagogisch Centrum (KPC).

Wijnstra, J. (red.) (1988). *Balans van het reken-wiskundeonderwijs in de basisschool. Uitkomsten van de eerste rekenpeiling medio en einde basisonderwijs*. PPON-reeks nr 1. Arnhem, Cito.

Willemsen, T. en E. Harskamp (1990). Systematische fouten in het optellen en aftrekken tot honderd. In: *Panama-post* 8, (4), 20 – 25.

Primair onderwijs

Periodieke Peiling van het Onderwijsniveau

Balans over de strategieën en procedures bij het hoofdrekenen halverwege de basisschool

PPON-reeks nummer 40

Cito

Nieuwe Oeverstraat 50
Postbus 1034
6801 MG Arnhem
T (026) 352 11 11
F (026) 352 13 56
www.cito.nl

Klantenservice

T (026) 352 11 11
F (026) 352 11 35
klantenservice@cito.nl

Artikelnummer: 59942
Fotografie: Ron Stemers

