

Ontwikkeling van een gecombineerd schoolexamen wiskunde en natuurkunde over Periodieke functies en trillingen en golven



Stichting Cito, Arnhem
2025

Auteurs: Irene van Stiphout, Carolien de Graaf

Met medewerking van Hugo Adema, Elisja Giepmans, Frits Rabbering, Paul van der Molen en
Koen Beurskens

Inhoud

Inleiding	5
Theoretische verkenning	6
Ontwerpeisen	10
Ontwikkeld materiaal schoolexamen havo	12
Ontwikkeld materiaal schoolexamen vwo	14
Reflectie op het ontwerpproces	16
Conclusie	18
Literatuur	20
Bijlage A: Domeinen havo wiskunde en natuurkunde	22
Bijlage B: Domeinen vwo wiskunde en natuurkunde	24
Bijlage C: methodeanalyse NHL Stenden-studenten	27
Bijlage D: reflecties constructeurs	31
Bijlage E: Schoolexamen havo opgaven en correctiemodel	35
Bijlage F: Schoolexamen vwo opgaven, uitwerkbijlage en correctiemodel	49

Inleiding

In 2024 hebben de vakvernieuwingscommissies gewerkt aan de ontwikkeling van nieuwe curricula voor de bovenbouw havo/vwo. Daarnaast is er een wetenschappelijke commissie ingesteld met als doel te adviseren over gewenste aanpassingen in het landelijke curriculum. Deze commissie bepleit speciale aandacht voor de verbindende vaardigheden (Ağirdağ et al., 2021b). Dit zijn vaardigheden die “op vergelijkbare wijze in meerdere leergebieden en vakken aan de orde komen” (Ağirdağ et al., 2021b, p. 32). Door verschillende vakken met elkaar te verbinden worden leerlingen geholpen om samenhang en overeenkomsten tussen vakken te gaan zien (Ağirdağ et al., 2021b).

Een pleidooi voor meer relaties tussen vakken is niet nieuw. Ook de Europese Commissie bepleit het investeren in geïntegreerde skills, bijvoorbeeld via een STEM-programma (science, technology, engineering, mathematics). Voor Cito ligt hier een kans om te laten zien wat er mogelijk is wat betreft de toetsing van deze verbindende vaardigheden.

Dit onderzoek is opgezet vanuit de veronderstelling dat een toets waarin verbindende vaardigheden betekenisvol aan de orde komen, de integratie tussen vakken kan verstevigen. Er is eerst een beperkte literatuurstudie verricht om in kaart te brengen wat er bekend is over de integratie van vaardigheden bij verschillende vakken. Vervolgens zijn er ontwerpeisen opgesteld voor een prototype van een geïntegreerde toets voor de vakken wiskunde en natuurkunde. Aan de hand van deze ontwerpeisen hebben twee teams van toetsconstructeurs ieder een prototype van een schoolexamentoets ontwikkeld. De constructeurs hebben ook gereflecteerd op het ontwerpproces, en hun mening gegeven over de haalbaarheid van deze vorm van toetsen.

Theoretische verkenning

Belang van verbindende vaardigheden

De problemen waar leerlingen van nu mee te maken krijgen zijn complex: armoede, ongelijkheid, ziektes, klimaatverandering, tekorten aan zoet water, energietransitie, immigratie et cetera. Het gevolg hiervan is dat er steeds meer vraag is naar mensen die zich kunnen aanpassen, zich willen verdiepen, kunnen innoveren en nadenken over problemen die ingewikkeld zijn, en die technische kennis hebben (Maass & Engeln, 2019). De Europese Commissie pleit er dan ook voor om meer te investeren in geïntegreerde skills, zoals bijvoorbeeld science, technology, engineering, mathematics, afgekort STEM (European Commission 2016, p. 4).

Ook Maass et al. (2019) wijzen erop dat de ontwikkeling van STEM-competenties belangrijk is in tijden van snelle technologische innovatie en wereldwijde uitdagingen. STEM-competenties verbeteren onder meer de wetenschappelijke geletterdheid en kunnen een basis vormen voor verantwoord burgerschap, inclusief een ethisch besef van verantwoord omgaan met onze planeet. Tegelijkertijd wordt gewaarschuwd dat geïntegreerd STEM-onderwijs ook aandacht moet besteden aan de leerdoelen binnen de individuele vakken om te zorgen dat daar ook de vereiste diepgang wordt gehaald (Thibaut et al., 2018).

De laatste resultaten van de internationaal vergelijkende studie PISA wijzen er echter op dat in welvarende landen zoals de Europese landen, de Verenigde Staten en Australië ongeveer 20% van de leerlingen rond hun vijftiende levensjaar nog onvoldoende vaardigheden heeft opgedaan in wiskunde en science (Maass et al, 2019).

Hoewel het belang van STEM-onderwijs breed wordt onderschreven, is nog veel onduidelijk over hoe een STEM-curriculum eruit zou kunnen zien en wat dat de leerlingen precies zou moeten brengen (English, 2016). Ook is nog onduidelijk wat de rollen zijn van de verschillende monovakken in het STEM-onderwijs. Maass et al. (2019) zien drie factoren die de integratie van verschillende disciplines tot een vakoverstijgend geheel bemoeilijken:

1. Het proces van integratie op zichzelf is uitdagend.
2. Leraren missen vertrouwen en kennis over het integreren van vakken.
3. De lerarenopleidingen zijn gericht op één monovak, wat kan zorgen voor een beperkt perspectief op het belang van de andere disciplines.

Er is wel overeenstemming over het belang van het gebruik van *real world contexts* in het onderwijs om leerlingen voor te bereiden op complexe *real world problems* die vragen om de

kritische en creatieve toepassing van kennis en vaardigheden uit verschillende disciplines (Maass et al., 2019). In Nederland zijn de context-conceptbenadering in de bètavakken, maar vooral ook de ontwikkeling van het vak Natuur, Leven en Technologie (NLT) hierop geënt.

Er is nu ruim 15 jaar ervaring opgedaan met interdisciplinair bètaonderwijs in het vak NLT. De hoofddoelstellingen van NLT zijn 1. de aantrekkelijkheid van het bètaonderwijs verhogen, om de instroom in bèta- en technologiestedies te vergroten en 2. de samenhang tussen de verschillende bètavakken versterken (Vereniging NLT, z.d.). Het vak NLT onderscheidt zich op vier kenmerken van de monovakken aardrijkskunde, biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde. Die kenmerken zijn interdisciplinariteit, studie- en beroepscontext, de rol die technologie speelt in de wetenschap en de rol die de taal van de wiskunde speelt in de natuurwetenschap.

Relatie wiskunde en natuurkunde

Omdat in dit onderzoeksproject uit praktische overwegingen gekozen is voor het ontwikkelen van een geïntegreerde toets voor wiskunde en natuurkunde, verdient de literatuur over de positie van wiskunde binnen STEM hier extra aandacht. Uit onderzoek van Den Braber et al. (2019) onder ruim 400 leerlingen van het vak NLT bleek dat de toegevoegde waarde van wiskunde voor leerlingen niet vanzelfsprekend is. Ongeveer een derde van de bevroegde leerlingen vond het moeilijk een beschrijving te geven van de relevantie van wiskunde in NLT. Daarnaast werd wiskunde vaak slechts gezien als dienend vak voor het rekenwerk binnen de exacte vakken en niet als een vak waarin verbindende vaardigheden zoals probleemoplossen en modelleren een grote rol spelen.

Volgens Kop & Eijkelhof (2014) constateren docenten uit het hoger onderwijs dat ook eerstejaarsstudenten formules vaak alleen als rekentuig zien, en ontbreekt het kunnen lezen en interpreteren van formules, zowel in natuurwetenschappelijke vakken als bij wiskunde. Zij wijzen er ook op dat de manier van omgaan met formules in de eindexamens nogal verschilt per vak. Bij de natuurkunde-examens spelen formules een grote rol en lag de nadruk in de opgaven in 2014 destijds meer op de rekenkant van formules dan op de interpretatie ervan. Sinds de invoering van de context-conceptbenadering in 2016 is er meer aandacht voor de betekenis van de gebruikte formules (e.g. Bruning & Michels, 2013).

De problematiek van een eenzijdige blik op formules met een focus op rekenen speelt ook internationaal. Recent is in de Verenigde Staten het Sci-Math Sensemaking Framework ontwikkeld (Kaldaras & Wieman, 2023). Daarin gaat het onder meer om het ontwikkelen van

conceptueel begrip van kwantitatieve relaties en de natuurkundige betekenis van vergelijkingen die een bepaald fenomeen beschrijven.

Als motivatie voor het versterken van de rol van wiskunde in het STEM-onderwijs geven Maass et al. (2019) drie argumenten. Als eerste noemen ze 21-eeuwse vaardigheden als kritisch denken, probleemoplossen en analytische vaardigheden. Deze komen in alle onderdelen van STEM voor en kunnen worden versterkt vanuit een wiskundig perspectief. Als tweede noemen ze de rol van wiskunde in het begrijpen van de wereld en het doen van voorspellingen. Dan gaat het om het in context toepassen van geleerde concepten en het modelleren van problemen (bijv. door kwantitatief redeneren, door het gebruik van grafieken en formules om groei of verandering te beschrijven en door het wiskundig modelleren van diverse fenomenen). Ten derde zien ze een rol voor wiskunde en STEM in relatie tot burgerschap. Als burgers zouden leerlingen in staat moeten zijn om discussies te volgen over wereldwijde problemen zoals klimaatverandering, voedselvoorziening en afvalverwerking, en zouden hierover geïnformeerd beslissingen moeten kunnen nemen. Informatie over deze thema's wordt in de media vaak wiskundig gepresenteerd in de vorm van getallen, grafieken en symbolen.

De argumenten van Maass et al. (2019) hebben in eerste instantie betrekking op de inrichting van het STEM-onderwijs. Volgens Ağirdağ et al. (2021b) zijn het de scholen zelf die het geïntegreerde onderwijs vormgeven. Cito zou hieraan kunnen bijdragen door vanuit zijn expertise in toetsontwikkeling te adviseren over het geïntegreerd toetsen van de vakinhouden en van de verbindende vaardigheden. In dit project gaan we uit van een invulling op basis van het tweede argument van Maass et al. (2019) en richten we ons op het verkennen van de mogelijkheden voor een geïntegreerde schoolexamentoets wiskunde en natuurkunde.

Toetsing van verbindende vaardigheden

In hun meta-analyse van toetsen in STEM-onderwijs onderscheiden Gao, Li, Shen, Sun (2020) drie manieren waarop disciplines getoetst kunnen worden: monodisciplinair, interdisciplinair en transdisciplinair. Met interdisciplinair wordt bedoeld dat er sprake is van integratie van kennis en vaardigheden uit twee of meer disciplines, maar dat het leren in die disciplines nog zichtbaar onderscheidbaar is. Met transdisciplinair wordt bedoeld dat er een focus ligt op het oplossen van een complex probleem door het combineren van ideeën, kennis en vaardigheden uit verschillende disciplines in één geheel. Uit de meta-analyse kwam dat de meeste STEM-assessments gaan over monodisciplinaire kennis, monodisciplinaire houding en transdisciplinaire houding. Gao et al. (2020) wijzen erop dat er allerlei programma's zijn voor integratie van vakken, inter- of

transdisciplinair, maar dat toetsing dan toch vaak monodisciplinair is. Bovendien zijn er maar weinig leraren die kennis hebben van of getraind zijn om leerlingen te toetsen in STEM (Gao et al., 2020). Ook komt het vaak voor dat er één discipline dominant is in een geïntegreerd pakket (Goos et al., 2023). Den Braber et al. (2019) wijzen erop dat het voor een geslaagde integratie van vakken van belang is dat leraren hun opvattingen en houding ten opzichte van hun eigen vak tijdelijk opzij kunnen zetten en waardering hebben voor de bijdrage van elke discipline aan het geheel.

Om grip te krijgen op verschillende cognitieve niveaus zijn de opgaven die voor dit project zijn ontwikkeld geclassificeerd zoals dat gebeurt bij het internationale onderzoek Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS). Dit is een internationaal assessment van wiskunde en science dat sinds 1995 wordt afgenomen bij leerlingen in groep 6 van de basisschool en leerjaar 2 in het voortgezet onderwijs. Het kader dat hierin wordt gebruikt is de driedeling *knowing – applying – reasoning*, ofwel *kennis – toepassen – inzicht* (Mullis et al. 2021). Onder deze begrippen verstaan we, in navolging van TIMSS, het volgende.

Bij *kennis* gaat het om feiten, concepten en procedures die leerlingen moeten weten. Het herkennen en beschrijven daarvan en voorbeelden kunnen geven.

Toepassen heeft betrekking op het toepassen van kennis en conceptueel begrip in allerlei situaties. Daarnaast gaat het om het gebruik van deze kennis om groepen objecten of materialen te vergelijken, te contrasteren en te classificeren, het relateren van kennis van een wetenschappelijk concept aan een specifieke context, het genereren van verklaringen, en het oplossen van praktische problemen.

Bij *inzicht* gaat het om het logische, systematische denken dat leerlingen moeten gebruiken om oplossingen voor problemen te genereren en te rechtvaardigen, gevolgtrekkingen te maken en om te gaan met complexe relaties tussen wiskundige objecten. Daarnaast gaat het om het gebruik van bewijsmateriaal en wetenschappelijk inzicht om te analyseren, synthetiseren en generaliseren, vaak in onbekende situaties en complexe contexten.

Ontwerpeisen

Uit het theoretisch kader blijkt dat er allerlei initiatieven zijn voor integratie van vakken, inter- of transdisciplinair, maar dat toetsing dan toch vaak monodisciplinair is (Gao et al., 2020). In dit project doen we een aanzet tot het transdisciplinair toetsen van twee vakken: wiskunde en natuurkunde. Het doel van het project is om een betekenisvolle toets te ontwikkelen in het kader van een schoolexamen, waarbij een wiskundig domein en een natuurkundig domein gezamenlijk aan de orde komen. Er zijn twee prototypen ontwikkeld, een voor havo en een voor vwo.

Op basis van de examenprogramma's wiskunde en natuurkunde van havo en vwo is een inventarisatie gemaakt van geschikte domeinen die voldoende raakvlak met elkaar hebben voor een gemeenschappelijk schoolexamen. Hieruit kwam naar voren dat het onderwerp periodieke functies bij wiskunde en het onderwerp trillingen en golven bij natuurkunde geschikte domeinen zijn. Periodieke functies zijn onderdeel van de wiskunde B-programma's. Via Nelleke den Braber – onderzoeker bij het lectoraat Wendbaar Vakmanschap van NHL Stenden op het gebied van de participatie van wiskundeleraren in het interdisciplinair bètavak Natuur, Leven en Technologie (NLT) – is er contact geweest met twee studenten die bij NHL Stenden de master leraar wiskunde/ leraar natuurkunde doen. Zij zijn ook bezig met de verbinding vanuit wiskunde en natuurkunde op het subdomein goniometrie en trillingen en golven. Hiervoor hebben zij een methodeanalyse uitgevoerd die ze met Cito gedeeld hebben. Deze analyse is opgenomen in bijlage C.

Op basis van het theoretisch kader, het projectvoorstel en overleg met de toetsconstructeurs zijn we tot de volgende ontwerpeisen voor de transdisciplinaire toetsen gekomen.

Ontwerpeisen

- Het streven is om toetsen te ontwikkelen die gaan over een probleem waarin het wiskundig domein **periodieke functies** en het natuurkundig domein **trillingen en golven** aan de orde komen.
- Er komt een schoolexamen voor havo en een schoolexamen voor vwo.
- Aan dit project werken vier toetsconstructeurs: twee wiskundigen en twee natuurkundigen. De schoolexamens worden ieder (havo en vwo) door een duo van een

wiskundige en een natuurkundige geconstrueerd. Op deze manier zorgen we dat de specifieke expertise is geborgd.

- De invulling van de toets – schriftelijke toets, praktische opdracht of andere vorm – laten we over aan de inzichten van de constructeurs. Ook de mogelijkheid voor leerlingen om wel of niet samen te werken laten we aan de constructeurs. Uitgangspunt is dat het gaat om een schoolexamen. De twee toetsen die worden opgeleverd hebben niet allebei de vorm van een praktische opdracht. Afstemming hierover is dus noodzakelijk.
- De precieze omvang van de schoolexamens, het totaal aantal te behalen scorepunten en de duur van de toets, wordt overgelaten aan de inzichten van de constructeurs.
- De toetsen gaan bestaan uit een transdisciplinair gedeelte en mogelijk nog vakspecifieke gedeeltes om te zorgen dat de domeinen worden afgedekt. In navolging van Maass et al. (2019) zien we als mogelijkheden voor het transdisciplinaire deel het gebruik van wiskunde in toepassingen en in het modelleren van problemen. Meer specifiek kan het gaan om kwantitatief redeneren over goniometrische formules en het gebruik van grafieken en formules om wiskundige modellen van trillingen en golven te beschrijven. Dat betekent dat het onderliggende model eruit komt te zien als in Figuur 1 hieronder.



Figuur 1: Schematische weergave van de verdeling van de vakken over de toets.

- Iedere vraag wordt geclassificeerd volgens het kader *kennis – toepassen – inzicht* zoals beschreven in het theoretisch kader.
- De twee duo's leveren ieder een compleet schoolexamen aan, een duo voor havo, een duo voor vwo. De eindredactie van de opgaven ligt bij Cito.

Ontwikkeld materiaal schoolexamen havo

Voor dit schoolexamen is één context ontwikkeld: Trillende tandenborstel. De context gaat over een elektrische tandenborstel die in een statief is geklemd. Aan het ijzeren staafje van de tandenborstel wordt een koord bevestigd dat strakgetrokken wordt via een katrol en gewichtjes. Als de tandenborstel wordt aangezet, gaat het ijzeren staafje trillen en ontstaat er een staande golf in het koord.

Het eerste deel van de toets is theoretisch van aard. Hierin worden zowel wiskundige vaardigheden als natuurkundige inzichten bevraagd. Het tweede deel beslaat een praktisch gedeelte waarin leerlingen de proefopstelling nabouwen, een hypothese formuleren, metingen verrichten en daarmee tot een antwoord komen op de vraag met welke frequentie het ijzeren staafje in de elektrische tandenborstel trilt.

De context komt voort uit een eindexamenopgave Natuurkunde VWO (2018-1). Het schoolexamen bestaat uit 15 vragen met in totaal 46 punten. Iedere vraag is gekoppeld aan een domein of subdomein uit de syllabi natuurkunde en wiskunde (CvTE, 2023a; CvTE, 2023b). Voor deze bronnen, zie ook examenblad.nl. Daarnaast is van elke vraag aangegeven hoe deze past in het framework *kennis – toepassen – inzicht* (Mullis et al. 2021). Het resultaat hiervan staat in tabel 1.

De toetsen en de bijbehorende correctiemodellen zijn te vinden in bijlage E en F.

Tabel 1: koppeling van vragen aan de syllabi havo, cognitieve niveaus en mate van transdisciplinariteit.

Vraag	# Punten	Subdomein natuurkunde	Subdomein wiskunde	Kennis	Toepassen	Inzicht	Transdisciplinair
1	3	B1.3		x			nee
2	2	B1.4			x		nee
3	3	A12.2	B3		x		ja, maar niet in beoogde subdomeinen
4	3		B4		x		nee
5	3		B4			x	nee
6	2	B1.5				x	nee
7	4	B1.3	B4		x		ja
8	3	B1.4	B4			x	ja
9	2	A5.4		x			nee
10	3	A5.6			x		nee
11	2	A5.6			x		nee
12	4	A5.7 en A5.8	B3		x		ja, maar niet in beoogde subdomeinen
13	5	A12.2	B3		x		ja, maar niet in beoogde subdomeinen
14	4	B1.3	A3			x	ja, maar niet in beoogde subdomeinen
15	3	A12	A3		x		ja, maar niet in beoogde subdomeinen
Totaal	46						

Ontwikkeld materiaal schoolexamen vwo

Voor dit schoolexamen zijn drie contexten ontwikkeld: Trampoline, Slinger en Oscilloscoop. In de context Trampoline worden aan de hand van metingen in Coach de bewegingen van een trampolinespringer geanalyseerd. In de context Slinger wordt gerekend aan de lengte van de boog en aan de uitwijking. De context Oscilloscoop gaat over een motor en een zuiger waarvan de bewegingen worden vastgelegd en over Lissajousfiguren.

Het schoolexamen bestaat uit 14 vragen met in totaal 44 punten. Van de vragen in deze drie contexten is vastgelegd bij welk domein of subdomein uit de syllabi natuurkunde en wiskunde (CvTE, 2023c; CvTE, 2023d) deze horen. Daarnaast is van elke vraag aangegeven hoe deze past in het framework *kennis – toepassen – inzicht* (Mullis et al. 2021). Het resultaat hiervan staat in tabel 2.

De toets en het bijbehorende correctiemodel zijn te vinden in bijlage E en F.

Tabel 2: koppeling van vragen aan de syllabi vwo, cognitieve niveaus en mate van transdisciplinariteit.

Context	Vraag	# punten	Subdomein natuurkunde	Subdomein wiskunde	Kennis	Toepassen	Inzicht	Transdisciplinair
Trampoline	1	2	B1.1					Nee
	2	5		C2.1, D10		x		Nee
	3	4	B1.2/B1.5	D10, B5.8	x	x		Ja
	4	7	C2.2	C1.2, C2.1, D10		x	x	Ja
Slinger	5	3	B1	B5.8		x		Ja, maar niet in beoogde subdomeinen
	6	2		E2, E4	x	x		Nee
	7	3		E1.3		x		Nee
	8	3	B1	D11		x		Ja
Oscilloscoop	9	3	B1.5	D11		x		Ja
	10	2	B1.1	B2	x			Ja, maar niet in beoogde subdomeinen
	11	2					x	Nee
	12	3	B1.5				x	Nee
	13	4		D10	x	x		Nee
	14	1	B1.2		x			Nee
Totaal		44						

Reflectie op het ontwerpproces

Tijdens de constructie van de schoolexamens kwamen verschillende moeilijkheden in beeld.

Om hier grip op te krijgen en dit systematisch in beeld te brengen, is aan alle constructeurs gevraagd om bij te houden waar ze tegenaan liepen en deze bevindingen apart te rapporteren.

De volledige reflecties zijn te vinden in bijlage D. Hieronder volgt een gerubriceerd overzicht.

- **Praktisch en organisatorisch**

Het materiaal dat is ontwikkeld, is gebaseerd op de examenprogramma's die nu gelden en op de huidige vakkenstructuur. In die structuur is de combinatie mogelijk van natuurkunde en wiskunde A. Dat betekent dat de combinatie van natuurkunde en wiskunde B niet vanzelfsprekend is. In de nieuwe vakkenstructuur heeft elk profiel een eigen soort wiskunde. Wellicht dat een integrale toets in de nieuwe programma's meer tot zijn recht kan komen.

- **Verschillen in aard en cultuur**

Tijdens de constructie bleek hoe verschillend de schoolvakken natuurkunde en wiskunde zijn en hoe deze verschillen doorwerken in de toetsing.

- Bij wiskunde B gaat het veelal over het uitvoeren van procedures en wordt er veel gerekend. Bij natuurkunde ligt de nadruk meer op redeneren. Dit verschil is terug te vinden in de correctievoorschriften bij de examens. Bij natuurkunde gaan er relatief veel punten naar de oplosstrategie. Het correct uitvoeren van het rekenwerk is veelal samengevat in één zogeheten completeerpunt. Bij wiskunde echter wordt er meer waarde gehecht aan het stapsgewijs en systematisch opschrijven van berekeningen, en kunnen er voor afzonderlijke rekenstappen punten worden toegekend. In dit verband is het interessant dat er bij wiskunde B een onderzoek is geweest naar een alternatieve opzet van het correctievoorschrift gebaseerd op de natuurkundeaanpak (Van Stiphout en Stolwijk, 2022). Hoewel dit onderzoek niet direct heeft gezorgd voor een andere aanpak in de correctievoorschriften bij wiskunde, hebben delen van die aanpak wel degelijk hun weg gevonden naar de examenpraktijk. Deze alternatieve

correctievoorschriften zouden de culturen van natuurkunde enerzijds en wiskunde anderzijds dichterbij elkaar kunnen brengen.

- Onderdeel van de cultuur binnen de vakken is ook het omgaan met eenheden en significantie. In de syllabus van wiskunde B komt het woord significantie niet voor. In de correctievoorschriften staan eenheden vaak tussen haakjes wat betekent dat leerlingen deze niet per se moeten opschrijven.
- In het verlengde hiervan is opvallend dat het bij wiskunde B belangrijk is dat er exacte antwoorden worden gegeven. Bij natuurkunde zijn uitkomsten per definitie niet exact, en is juist de vraag naar de nauwkeurigheid van de gegeven uitkomst relevant.
- Een ander punt waarop het verschil in cultuur tot uiting komt, is het verschil in welke vraagstukken als relevant worden gezien. Als voorbeeld noemt constructeur Frits Rabbering dat hij vragen wil stellen die vanuit natuurkundig oogpunt zinvol zijn, zoals “blijkt uit de wet van behoud van energie dat de trampoline inderdaad genoeg energie meegeeft aan de trampolinespringer, zodat deze de waargenomen hoogte kan halen?” en niet zozeer geïnteresseerd is in wat de snelheid op een hoogte van 1 meter is. Dat zou je natuurlijk kunnen uitrekenen en daarmee kan een leerling dan aantonen dat hij wiskundig vaardig is, maar wat is de relevantie van de vraag?

- **Opvattingen van leraren**

Tot slot hebben we in dit project gemerkt wat uit de theoretische verkenning al duidelijk was, namelijk dat het voor een geslaagde integratie van belang is dat leraren hun opvattingen en houding ten opzichte van hun eigen vak tijdelijk opzij kunnen zetten en waardering hebben voor de bijdrage van elke discipline aan het geheel (Den Braber et al., 2019). Die botsing van culturen is door meerdere cg-leden genoemd.

Conclusie

Dit project is gestart met de constatering dat er behoefte is aan aandacht voor verbindende vaardigheden (Ağirdağ et al., 2021b). Vanuit die constatering was de gedachte dat het interessant is om te verkennen wat er in dit verband mogelijk is in relatie tot toetsing. Hiervoor zijn geïntegreerde toetsen ontworpen waarin wiskundige en natuurkundige concepten aan de orde komen. Deze toetsen kunnen gebruikt worden in schoolexamens wiskunde en natuurkunde.

De ambitie was om de domeinen periodieke functies vanuit wiskunde en trillingen en golven uit natuurkunde transdisciplinair te toetsen. De ontwikkelde toetsen bevatten vragen waarin dit het geval is. Voor havo gaat dat om twee vragen die transdisciplinair zijn in de bedoelde domeinen periodieke functies en trillingen en golven en om vijf vragen die transdisciplinair zijn in andere domeinen. Bij vwo gaat het om vier vragen die transdisciplinair zijn in de bedoelde domeinen en om één vraag die transdisciplinair is in andere domeinen. De overige vragen in beide toetsen gaan specifiek over wiskunde of over natuurkunde. Wat betreft cognitieve niveaus hebben alle vragen die als transdisciplinair gelabeld zijn betrekking op toepassen en inzicht. De combinatie van de vakgebieden heeft meerwaarde, omdat hierdoor meer typen vragen mogelijk zijn.

Hoewel de integratie van wiskunde en natuurkunde in de toetsen vorm heeft gekregen, zien we praktische bezwaren bij het verder integreren van deze vakken.

- Praktisch en organisatorisch

Leerlingen die natuurkunde doen, kunnen verschillende soorten wiskunde doen. Dit punt is van belang voor leraren die de ontwikkelde toetsen willen inzetten. Met alleen wiskunde A zijn sommige vragen wellicht (te) uitdagend. Als de nieuwe examenprogramma's van start gaan, zal dit probleem minder groot worden, omdat wiskunde dan gekoppeld wordt aan de profielen.

- Verschillen in aard en cultuur

Tijdens de constructie speelde dit onder meer in een andere opzet van correctievoorschriften in de examens en het belang wat daarin wordt gehecht aan denkstappen en rekenwerk. Daarnaast wordt er in beide vakken verschillend gedacht over

het belang van eenheden en significantie en het exact antwoorden. Het grootste punt in het verschil in cultuur is het verschil in wat er relevant wordt gevonden om te vragen.

- Opvattingen van leraren

Om vakken te kunnen integreren is het nodig dat leraren verder kijken dan hun eigen vak.

De opbrengst van dit project bestaat uit twee schoolexamens met daarin transdisciplinaire vragen. Daarmee laten we zien hoe wiskunde en natuurkunde op het gebied van periodieke functies en trillingen en golven geïntegreerd getoetst kunnen worden. Daarnaast hebben we scherper in beeld waarom integratie binnen de huidige syllabi ingewikkeld is.

Disseminatie

De bevindingen van dit onderzoek zullen worden gerapporteerd in een gezamenlijk artikel voor de vakbladen van wiskundeleraren (*Euclides*) en natuurkundeleraren (*NVOX*).

Literatuur

- Ağirdağ, O., Biesta, G., Bosker, R., Kuiper, R., Nieveen, N., Raijmakers, M., & van Tartwijk, J. (2021a). *Doel en ruimte. Tussenadvies 2 Wetenschappelijke Curriculumcommissie*. CurriculumCommissie.
- Ağirdağ, O., Biesta, G., Bosker, R., Kuiper, R., Nieveen, N., Raijmakers, M., Van Tartwijk, J. & Boogaard, M. (2021b). *Samenhang in het curriculum. Verdiepende studie Wetenschappelijke Curriculumcommissie*. CurriculumCommissie.
- Bruning, L., & Michels, B.I. (2013). *Concept-contextvenster: Zicht op de wisselwerking tussen concepten en contexten in het bèta-onderwijs*. SLO.
- College voor Toetsen en Examens. (2023a). Natuurkunde havo syllabus centraal examen 2025 versie 2, juni 2023. College voor Toetsen en Examens.
- College voor Toetsen en Examens. (2023b). Wiskunde B havo syllabus centraal examen 2025 versie 2, juli 2023. College voor Toetsen en Examens.
- College voor Toetsen en Examens. (2023c). Natuurkunde vwo syllabus centraal examen 2025 versie 4, juni 2023. College voor Toetsen en Examens.
- College voor Toetsen en Examens. (2023d). Wiskunde B vwo syllabus centraal examen 2025 versie 2, juli 2023. College voor Toetsen en Examens.
- Den Braber, N., Kruger, J., Mazereeuw, M., & Kuiper, W. (2019). Reflecting on the value of mathematics in an interdisciplinary STEM course. In U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen, & M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 4757–4764). Freudenthal Group & Freudenthal Institute, Utrecht University and ERME.
- English, L. D. (2016a). STEM education K-12: Perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*, 3(3), 1–8.
- European Commission. (2016). *Communication from the commission to the European Parliament, the Council, the European Economic and Social Committee and the Committee of the Regions*

- improving and modernizing Education*. Retrieved from <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/PDF/?uri=CELEX:52016DC0941>
- Gao, X., Li, P., Shen, J., & Sun, H. (2020). Reviewing assessment of student learning in interdisciplinary STEM education. *International Journal of STEM Education*. <https://doi.org/10.1186/s40594-020-00225-4>
- Goos, M., Carreira, S., & Namukasa, I. K. (2023). Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. *ZDM Mathematics Education*, 55(7), 1199-1217.
- Kaldaras, L. & Wieman, C. (2023). Cognitive framework for blended mathematical sensemaking in science. *International Journal of STEM Education*, 10(1), 1–25.
- Mullis, I. V., Martin, M. O., & von Davier, M. (2021). *TIMSS 2023 Assessment Frameworks*. International Association for the Evaluation of Educational Achievement.
- Maass, K., Geiger, V., Romero Ariza, M., & Goos, M. (2019). The role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM Mathematics Education*, 51(6), 869–884. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5>
- Maass, K., & Engeln, K. (2019). Professional development on connections to the world of work in mathematics and science education. *ZDM Mathematics Education*, 51(6), 967-978.
- Van Stiphout, I. & Stolwijk, R. (2022). Onderzoek CTE 2022 *Alternatieve correctievoorschriften vwo wiskunde B*. Cito.
- Vereniging NLT. (z.d.). *Visie en doelen*. Geraadpleegd op 18 maart 2024, van <https://www.verenigingnlt.nl/over/visie-doelen/>

Bijlage A: Domeinen havo wiskunde en natuurkunde

Bronnen:

- https://www.examenblad.nl/system/files/2022/syllabi/syllabus_wiskunde_b_havo_versie_2_2024.pdf
- <https://www.examenblad.nl/2025/havo/documenten/syllabus-natuurkunde-havo>

Wiskunde

Subdomein B4 Periodieke functies

De kandidaat kan periodieke verschijnselen beschrijven door middel van sinus- of cosinusfuncties, de bijbehorende sinusoiden tekenen en de karakteristieke eigenschappen ervan benoemen en alle oplossingen van een goniometrische vergelijking op een gegeven interval bepalen.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- de exacte waarden van $\sin(x)$ en $\cos(x)$ waarbij x een veelvoud van $\frac{1}{6}\pi$ of $\frac{1}{4}\pi$ is.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. graden omrekenen in radialen en omgekeerd;
2. de grafiek tekenen van functies van de vorm $f(x) = d + a \cdot \sin(b(x - c))$ en $f(x) = d + a \cdot \cos(b(x - c))$;
3. vergelijkingen van het type $f(x) = c$ oplossen in een gegeven interval met f een functie als in B4.2. genoemd en daarbij gebruik maken van periodiciteit en symmetrie;
4. van een sinusoidale het bijbehorende functievoorschrift opstellen.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

5. in een gegeven probleemsituatie voor een periodiek verschijnsel een functievoorschrift zoals bedoeld in B4.2 opstellen, daarmee berekeningen uitvoeren en de resultaten interpreteren.

Natuurkunde

Subdomein B1. Informatieoverdracht

Eindterm

De kandidaat kan in contexten eigenschappen van trillingen en golven gebruiken bij het analyseren en verklaren van onder andere informatieoverdracht.

Specificatie

De kandidaat kan:

- 1 trillingsverschijnselen analyseren,
 - vakbegrippen: uitwijking, amplitude, periode, harmonische trilling;
- 2 berekeningen maken aan de eigentrilling van een massa-veersysteem,
 - vakbegrippen: eigenfrequentie, resonantie;
- 3 golfverschijnselen analyseren,
 - gebruiken dat geluid een golfverschijnsel is;
 - vakbegrippen: lopende golf, voortplantingssnelheid, geluidssnelheid, echo, lichtsnelheid, transversaal, longitudinaal;
- 4 bij een staande golf het verband tussen de golflengte en de lengte van het trillende medium met behulp van een tekening toelichten,
 - vakbegrippen: knoop, buik, grondtoon, boventoon;
 - minimaal in de context: muziekinstrumenten;
- 5 uit (u,t) en (u,x) -diagrammen de fysische eigenschappen (zie specificaties 1 en 3) van de trillingen en golven bepalen,
 - minimaal in de context: cardiogram, oscillogram;

De volgende formules horen bij deze specificaties:

$$f = \frac{1}{T} \quad v = f\lambda$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$$

Bijlage B: Domeinen vwo wiskunde en natuurkunde

Bronnen:

- https://www.examenblad.nl/system/files/2022/syllabi/syllabus_wiskunde_b_versie_2_vwo_2024.pdf
- <https://www.examenblad.nl/2025/vwo/documenten/syllabus-natuurkunde-vwo>

Wiskunde

Domein D Goniometrische functies

De kandidaat kan bij periodieke verschijnselen formules opstellen en bewerken, de bijbehorende grafieken tekenen, vergelijkingen oplossen en hierbij de periodiciteit met inzicht gebruiken.

Parate kennis

De kandidaat kent:

- het sinusmodel in de vormen $f(x) = d + a \cdot \sin(b(x - c))$ en $f(x) = d + a \cdot \cos(b(x - c))$ met als grafiek een sinusoïde;
- de exacte waarden van $\sin(x)$, $\cos(x)$ en $\tan(x)$ waarbij x een veelvoud van $\frac{1}{6}\pi$ of $\frac{1}{4}\pi$ is;
- formules die de symmetrie-eigenschappen weergeven van de sinus-, cosinus- en tangens grafiek;
- formules die weergeven hoe de sinus- en cosinusgrafiek door translatie uit elkaar ontstaan.

Parate vaardigheden

De kandidaat kan:

1. graden omrekenen in radialen en omgekeerd;
2. de grafiek tekenen van een sinusmodel;
3. van een sinusoïde het bijbehorende functievoorschrift opstellen;
4. formules herleiden met behulp van de symmetrie-eigenschappen van de sinus-, cosinus- en tangensgrafiek;
5. formules herleiden met behulp van translaties waarbij de sinus- en cosinusgrafiek uit elkaar ontstaan;

6. vergelijkingen oplossen van de vorm $\sin(x) = c$, $\cos(x) = c$, $\tan(x) = c$ en hierbij periodiciteit en symmetrie gebruiken.
7. vergelijkingen oplossen van de vorm $f(x) = c$ met $f(x)$ een sinusmodel en hierbij periodiciteit en symmetrie gebruiken;
8. vergelijkingen oplossen van het type $\sin(f(x)) = \sin(g(x))$, $\cos(f(x)) = \cos(g(x))$ en $\tan(f(x)) = \tan(g(x))$, waarbij f en g lineaire functies van x zijn en hierbij periodiciteit en symmetrie gebruiken;
9. ongelijkheden oplossen van het type
 $\sin(f(x)) \leq c$, $\sin(f(x)) < c$, $\sin(f(x)) > c$, $\sin(f(x)) \geq c$
 $\cos(f(x)) \leq c$, $\cos(f(x)) < c$, $\cos(f(x)) > c$, $\cos(f(x)) \geq c$
 $\tan(f(x)) \leq c$, $\tan(f(x)) < c$, $\tan(f(x)) > c$, $\tan(f(x)) \geq c$
 waarbij f en g lineaire functies zijn.

Productieve vaardigheden

De kandidaat kan:

10. in een gegeven probleemsituatie voor een periodiek verschijnsel een sinusmodel opstellen, de bijbehorende sinusoïde tekenen, berekeningen uitvoeren aan dit model en de resultaten terugvertalen naar de probleemsituatie;
11. een harmonische trilling opvatten als een sinusoïde, er een passend functievoorschrift voor opstellen en de begrippen frequentie en trillingstijd daarbij correct hanteren;
12. de som- en verschilformules en de verdubbelingsformules gebruiken bij het herleiden van formules en het oplossen van vergelijkingen;
13. de formules $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ en $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$ gebruiken bij het herleiden van formules en het oplossen van vergelijkingen;
14. symmetrie-eigenschappen en translaties gebruiken bij het oplossen van vergelijkingen.

Natuurkunde

Subdomein B1. Informatieoverdracht

Eindterm

De kandidaat kan in contexten eigenschappen van trillingen en golven gebruiken bij het analyseren en verklaren van onder andere informatieoverdracht.

Specificatie

De kandidaat kan:

- trillingsverschijnselen analyseren en grafisch weergeven,
 - aan de hand van een numeriek model het verband laten zien tussen de natuurkundige voorwaarde van een harmonische trilling (kracht evenredig met en tegengesteld gericht aan de uitwijking) en de wiskundige beschrijving ervan (sinusfunctie);
 - vakbegrippen: periode, gereduceerde fase, faseverschil;
- berekeningen maken aan de eigentrilling van een massa-veersysteem,
 - vakbegrippen: eigenfrequentie, resonantie;
- golfverschijnselen analyseren en grafisch weergeven,
 - gebruiken dat geluid een golfverschijnsel is;
 - vakbegrippen: gereduceerde fase, faseverschil, lopende golf, voortplantingssnelheid, geluidssnelheid, echo, lichtsnelheid, transversaal, longitudinaal;
 - Minimaal in de context: Informatieoverdracht;
- bij een staande golf het verband tussen de golflengte en de lengte van het trillende medium analyseren,
 - vakbegrippen: knoop, buik, grondtoon, boventoon;
 - minimaal in de context: muziekinstrumenten;
- uit (u,t) en (u,x) -diagrammen de fysische eigenschappen (zie specificaties 1 en 3) van de trillingen en golven bepalen,
 - minimaal in de context: cardiogram, oscillogram;
- uitleggen hoe de waargenomen golflengte en frequentie van een golf veranderen als bron en ontvanger ten opzichte van elkaar bewegen.
 - vakbegrip: dopplereffect

De volgende formules horen bij deze specificaties:

$$f = \frac{1}{T} \quad v = f\lambda \quad \vec{F}_{res} = -C\vec{u}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{C}}$$

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta t}{T} \quad \Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\lambda} \quad v_{max} = \frac{2\pi A}{T}$$

$$u = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \text{ niet : uitrekenen van } t \text{ als } u \text{ gegeven is}$$

$$\ell = n \frac{1}{2} \lambda \quad \ell = (2n-1) \frac{1}{4} \lambda$$

Bijlage C: methodeanalyse NHL Stenden- studenten

Vraag	Methodes natuurkunde S: Systematische natuurkunde N: Newton	Methode wiskunde	Bevindingen
Vraag 1: Welke plaats hebben goniometrische functies en goniometrische verhoudingen in het curriculum wanneer het boek wordt gevolgd? Waarom: Inzicht krijgen in de volgorde van onderwerpen, om te vergelijken of onderwerpen eerder bij wiskunde of natuurkunde aan bod komen.	<u>Leerjaar 3</u> Komt niet terug in het derde leerjaar. <u>Leerjaar 4</u> Het herkennen van een rechthoekige driehoek die ontstaat bij het ontbinden van vectoren bij de context een object op een helling. Dit komt voor in verschillende hoofdstukken. Het berekenen van de grootte van vectoren en berekenen van hoeken in graden binnen de context krachten. S: oktober, november, april, mei N: maart, april, mei <u>Leerjaar 5</u> Arbeid berekenen aan de hand van krachtencomponenten waarbij gerekend wordt met radialen. S: september N: december Het berekenen van de uitwijking als tijd bekend is van een harmonische trilling met een goniometrische formule. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de hoekeenheid radialen. S: oktober, november N: september Het berekenen van de magnetische flux door de componenten van vectoren worden gebruikt. S: december, januari N: november <u>Leerjaar 6</u> Het herkennen van een rechthoekige driehoek in meerdere contexten. Het kunnen vinden van een uitdrukking van een bepaalde zijde middels goniometrische verhoudingen binnen meerdere contexten. S: Door het hele schooljaar heen N: Door het hele schooljaar heen	<u>Leerjaar 3</u> Het benoemen van de periode, amplitude en evenwichtsstand bij een grafische weergave van een sinusoidale. April Het berekenen van hoeken in graden en zijdes in rechthoekige driehoeken met behulp van de sinus, cosinus en tangens. Juni <u>Leerjaar 4</u> <u>Wiskunde B:</u> Het berekenen van hoeken in graden en zijdes in samengestelde figuren van meerdere rechthoekige driehoeken. December <u>Leerjaar 5</u> <u>Wiskunde B:</u> De hoekeenheid radialen wordt geïntroduceerd. Het opstellen van een goniometrische formule. Berekeningen uitvoeren met een goniometrische formule. Oktober Rekenen met vectoren. Vectoren ontbinden in horizontale en verticale componenten. Januari <u>Leerjaar 6</u> <u>Wiskunde B:</u> Goniometrische functies, de verdieping, toevoegen van de afgeleide en de integraal. Gedurende het schooljaar <u>Wiskunde A:</u> Radialen wordt genoemd als optie op de rekenmachine. Het opstellen van een goniometrische formule. Berekeningen uitvoeren met een goniometrische formule. November	Een basis voor goniometrische functies en vergelijkingen wordt al gelegd in de onderbouw bij wiskunde. Leerlingen met wiskunde A in hun pakket moeten het hebben van de basis vanuit de onderbouw: zij krijgen geen goniometrische verhoudingen meer in de bovenbouw. Wel krijgen zij de goniometrische functie in klas 6, maar dit is nadat deze al behandeld zijn bij natuurkunde. De goniometrische functie komt bij natuurkunde aan het begin van het vijfde leerjaar aan bod. Vanuit de methode Systematische Natuurkunde komt dit een maand later aan bod, waardoor het gelijk valt met het onderwerp bij wiskunde B. Bij Newton is de volgorde net anders, waardoor het onderwerp eerst behandeld wordt bij natuurkunde en daarna bij wiskunde. Bij wiskunde B en natuurkunde komt er geen specifieke stof meer terug in het zesde leerjaar. Bij natuurkunde worden de contexten meer divers, wiskunde B geeft een verdieping.
Vraag 2: Welke opbouw gebruikt de methode om nieuwe theorie aan te leren? Waarom:	De methode Systematische Natuurkunde introduceert nieuwe onderwerpen in een aparte paragraaf aan de hand van een context. Belangrijke begrippen zijn dikgedrukt weergegeven. Formules worden geïntroduceerd, gegeven en daarna ontbonden in eenheden. Tot slot volgt een voorbeeld van een opdracht inclusief uitwerking. Hierbij wordt toegelicht wat het denkproces is in algemene zin, de formule in de vorm zoals hij hier moet worden	De methode Getal en Ruimte werkt met een oriëntatieopdracht voorafgaand aan een theorieblok. Hierin wordt voorkennis geactiveerd, of een onderzoekende vraag gesteld die de theorie die daarna behandeld wordt laat ontdekken. Vervolgens komt een theorieblok waar dikgedrukt de belangrijkste begrippen zijn dikgedrukt weergegeven. Definities en stellingen worden gegeven, samen met één of meerdere	De methodes van natuurkunde werken standaard vanuit een gegeven context. Deze context blijft telkens redelijk gelijk, maar de wiskundige benadering verandert. Bij wiskunde wordt juist de vraagstelling en complexiteit langzamer verhoogd en wordt er

Inzicht krijgen in de opbouw van de aangeboden lesstof: wat is de rol van context, theorie en definities en hoe worden deze gebruikt in de methode. Daarnaast geeft dit inzicht in de opbouw van de opdrachten.	gebruikt, het invullen en tot slot het antwoord. Tussentijdse stappen worden niet toegelicht. Newton werkt in plaats van een context met een paragraaf-vraag: deze wordt beantwoord door de leerling eind van het hoofdstuk. De theorie in Newton is verdeeld over verschillende alinea's, waarbij dikgedrukt de belangrijke begrippen zijn weergegeven. Formules worden verduidelijkt weergegeven, waarbij de grootheden en eenheden worden gekoppeld aan de variabelen van de functie. Tot slot wordt een voorbeeldopdracht gegeven, waarbij de uitwerking van de opdracht achter elkaar is geschreven.	voorbeeldopdrachten waar de uitwerking stap voor stap wordt getoond. Als het een berekening betreft staan de stappen van de berekening toegelicht in het theorieblok, alvorens de voorbeeldopgave. Pas bij verwerkingsopdrachten wordt de complexiteit vergroot of contexten toegevoegd. Verklaring afkortingen GV: goniometrische verhoudingen GF: goniometrische functies	slechts sporadisch gewerkt met een contextrijke opdracht. Bij wiskunde A gebeurt dit vaker dan bij wiskunde B.
Vraag 3: Welke termen, definities en formules worden er in de methodes gebruikt bij het werken met goniometrische verhoudingen en goniometrische functies? Waarom: De vaktermen bij wiskunde en natuurkunde verschillen van elkaar. Om de overlap te versterken is het belangrijk de beide vaktaal te integreren en combineren.	Terminologie GV: Stelling van Pythagoras, schuine zijde van een driehoek, goniometrische formule, cosinus, sinus, tangens, rechthoekige driehoek, helling, hellingshoek, zijdes van een driehoek, vectoren, componenten, loodrecht, kracht, eenheid, grootte, assenstelsel, vectorgrootheden, gelijkvormig zijn van driehoeken, driehoekig, fase. Terminologie GF: Periodieke beweging, periode, trillingstijd, amplitude, uitwijking, harmonische trilling, sinusvormig, radiaal, evenwichtsstand, fase. Functies en formules: De formule die wordt gebruikt is voor het berekenen van de uitwijking bij een massa-veer systeem. De formule die hiervoor wordt gebruikt is: $u = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ Hierin staat - u voor de uitwijking van de veer - A voor de amplitude in meter - T voor de trillingstijd en - t voor de tijd in secondes, vanaf het moment dat $\phi = 0$ Deze formule gaat ervan uit dat dat de slingerende beweging begint vanuit een evenwichtsstand, maar dit is vaak juist niet het geval. Binnen de methodes wordt daarvoor het begrip <i>fase</i> geïntroduceerd om hiervoor te compenseren. De fase van een periodieke beweging is het aantal trillingen dat is uitgevoerd sinds de evenwichtsstand voor het eerst in de richting van de positieve uitwijking is gepasseerd, aldus het boek. Deze fase wordt vervolgens gereduceerd door deze te vergelijken met de eerste trilling. De fase wordt vervolgens van de ingevoerde tijd in een functie afgehaald als correctie. Bij natuurkunde komen de goniometrische verhoudingen voor bij het ontbinden van vectoren. Hierbij is er altijd een betekenis gegeven aan de vectoren en vind dit altijd plaats binnen een bepaalde context. De vectoren drukken daarmee een grootte met bijbehorende eenheid uit. In enkele gevallen (zie voorbeeld afgelegde weg) wordt ook een lengte uitgerekend met deze verhoudingen. Zo komen de verhouding terug bij het berekenen van de arbeid en de flux. De goniometrische functie komt terug bij de uitwijking van een uitwijking van bijvoorbeeld een massa-veersysteem. Daarbij wordt de goniometrische functie alleen gebruikt om de formule toe te lichten met de tekening: de beweging heeft de vorm van een sinusoidale, waarbij gelijk een formule	Terminologie GV: Sinus, cosinus, tangens, arcsinus, arccosinus, arctangens, rechthoekige driehoek, (overstaande/aanliggende) rechthoekszijde, schuine zijde, soscastoa, hellingsgetal, hellingshoek, hellingspercentage, verhouding, hoek tussen lijnen, vector, richtingscoëfficiënt. Terminologie GF: Periodieke functies, periodiek, periode, amplitude, evenwichtsstand, radialen, eenheidscirkel, standaardvorm, beginpunt, transleren, transformeren, vermenigvuldigen van functies. Functies en formules: Voor de goniometrische functie wordt de volgende standaardvorm gehanteerd: $f(x) = a + b \sin(c(x - d))$ Hierin staat - a voor de evenwichtsstand - b voor de amplitude - $\frac{2\pi}{c}$ geeft de periode - d de x-coördinaat van het punt waar de sinusoidale stijgend door de evenwichtsstand gaat Opdrachten met goniometrische verhoudingen worden gegeven binnen de meetkunde: aparte figuren zonder context. Bij wiskunde B wordt er eigenlijk alleen een context gegeven waarbij een waarde is uitgezet tegen de tijd. Deze afhankelijke waarde is dan een aantal personen, uren, dagen, graden, maar heeft geen natuurkundige basis. Bij wiskunde A wordt er een gelijke context gegeven, of komt de sinusoidale terug als uiterlijk kenmerk van bijvoorbeeld een dak.	Vanuit de methode voor wiskunde worden deelaspecten van de berekening duidelijker benoemd. Zo hebben de verschillende zijdes van de driehoek een naam, om zo een ezelsbruggetje op te kunnen stellen (soscastoa) voor het onthouden van de goniometrische verhoudingen. Binnen de methode van natuurkunde hebben deze berekeningen en de achtergrond van deze berekeningen geen plaats. Ook de kenmerkende aspecten van de sinusoidalefunctie zoals gebruikt binnen de wiskunde: de periode, evenwichtsstand, amplitude en het begingetal hebben deze benaming niet binnen natuurkunde. De begrippen worden heel vluchtig genoemd, om daarna direct gelinkt te worden aan de context. Daarbij lijkt de sinusoidale vergelijking minder op de wiskundige vergelijking: er zijn minder zichtbare aspecten. Dit is te verklaren, maar hier wordt binnen de methodes (zowel wiskunde als natuurkunde) geen aandacht aan gegeven. De amplitude is de uitwijking, de periode de trillingstijd. Het begingetal zoals benoemd bij wiskunde komt overeen met de fase bij natuurkunde. Echter, bij natuurkunde wordt deze apart aangeboden terwijl dit bij wiskunde een kenmerk is van de functie. Bij natuurkunde worden de goniometrische verhoudingen gebruikt voor het berekenen van componenten van een kracht. Daarnaast komen deze afbeeldingen terug bij het berekenen van arbeid en flux. In al deze figuren zijn rechthoekige driehoeken te herkennen die gebruikt worden om de onbekende componenten te berekenen. Bij wiskunde komen er geen contextrijke opdrachten meer terug waarin de goniometrische verhoudingen gebruikt worden.

	wordt gegeven om dit te beschrijven. Hierbij wordt nog kort een opmerking gemaakt dat 'de formule geldt als het voorwerp op $t=0$ de evenwichtsstand passeert in positieve richting'. Deze formule wordt gegeven en gebruikt, maar niet verder toegelicht.		Wat natu te re wor toel wor
Vraag 5: Op welke manier komt wiskunde terug binnen de natuurkundige methodes? Waarom: Om duidelijkheid te krijgen welke onderwerpen van wiskunde er nu al aan bod komen en op welke manier. Wat wordt er al gedaan?	De methode legt geen tussenstappen uit bij berekeningen of formules. Verder valt op dat een aantal concepten continue worden toegepast. Zo moeten leerlingen in staat zijn formules om te schrijven en/of vergelijkingen op te lossen, moeten leerlingen gelijkvormigheid bij driehoeken herkennen, een assenstelsel kunnen plaatsen om zo een formule te kunnen duiden of om hoeken te berekenen. De wiskunde rondom het rekenen met vectoren wordt verschillend aangeboden bij wiskunde en natuurkunde. Bij natuurkunde wordt de lengte van een vector uitgedrukt in de kracht, bij wiskunde krijgen alle vectoren een horizontale en verticale component en is de vectornotatie gebruikt die we terug zien bij matrices.		Wis doo Een gon gon asse vast moe wor uitg nau
Vraag 6: Op welke manier komt natuurkunde terug binnen de wiskundige methodes? Waarom: Om duidelijkheid te krijgen welke onderwerpen er nu al aan bod komen en op welke manier. Wat wordt er al gedaan?		Er zijn eigenlijk geen contextrijke opdrachten te vinden in de methode die natuurkundig van aard zijn. Enige uitzondering hierbij is de opdracht 11 uit hoofdstuk 10: het rekenen met vectoren. Hierbij moet een vector ontbonden worden in componenten langs een helling en loodrecht op de helling.	Cor natu boe

Bijlage D: reflecties constructeurs

Elisja Giepmans

1. Wiskunde B gebruiken in een natuurkundige context

Uit de opdrachtomschrijving volgde (impliciet) dat natuurkundige contexten gebruikt zouden gaan worden, waarbinnen ook die van wiskunde B aan bod zouden moeten komen. Dit leidde aan de voorkant tot voldoende inspiratie, maar bij de uitwerking liepen we tegen de volgende problemen aan:

- De integratie van het wiskundig domein periodieke functies bleef beperkt tot slechts enkele subdomeinen (zie EXCEL-bestand). Enkele oorzaken:
 - o Binnen natuurkunde alleen sinusöide bij een harmonische trilling, evt. met een horizontale verschuiving, dus algemeen $y_A = 0,02 \sin(1760t)$ ontbreekt en cosinus en tangens in zijn geheel;
 - o Natuurkunde meer gericht op kwalitatief redeneren, het wiskunde B-programma is vooral gericht op kwantitatieve berekeningen;
 - o In een context is het moeilijk, zo niet onmogelijk, om exacte berekeningen (incl. exacte waarden cirkel etc.) te verlangen en/of gebruik te maken van symmetrie, translaties, verdubbelingsformules, etc., terwijl dat een essentieel onderdeel van de stof is.
- Er werden juist andere domeinen/functietypen van de wiskunde verlangd, waardoor het SE veel te omvattend zou worden, waarschijnlijk pas geschikt als eindtoets in 6VWO waarin alle wiskunde B CSE-stof getoetst zou mogen worden. Een paar voorbeelden van wiskundige onderdelen die het SE niet gehaald hebben:
 - o limieten (uitwijking slinger benaderen door harmonische trilling)
 - o e-machten (dempte trilling)
 - o ...
- In het algemeen komt het exact of algebraïsch rekenen onvoldoende aan bod.

2. Correctievoorschrift

De correctievoorschriften worden bij natuurkunde en wiskunde B op een andere manier opgesteld. Bij wiskunde B gaat het om de uitwerking van echte wiskundige herleidingen en/of berekeningen binnen een context, terwijl bij natuurkunde ook aflezen in grafieken o.i.d. aan bod komt. Ook zijn er bij natuurkunde algemene antwoorden met een voorbeeld van een goed uitgewerkt antwoord, dit is bij wiskunde B niet gewoon. Overigens kan het eerdere project over herziening van correctievoorschriften wiskunde hiervoor wellicht nog handvaten bieden ...

3. Relevantie en de invloed daarvan op het constructieproces

Frits en ik (of eigenlijk het natuurkunde- en wiskunde B-programma) "botsten" af en toe over de relevantie van vragen. Waar natuurkundig het bijvoorbeeld relevant is om door middel van een proefopstelling de valversnelling te laten bepalen o.i.d., zouden we dat binnen de wiskunde eerder gebruiken ("want die is toch gewoon al bekend") om ermee te kunnen rekenen in bepaalde situaties. Hierdoor gebeurde tijdens de uitwisseling van de concepten het volgende:

- Ik bewerkte natuurkundige contexten dusdanig ver richting wiskunde B dat Frits de natuurkundige relevantie er niet of nauwelijks meer in herkende;
- Vervolgens repareerde Frits mijn bewerkingen, waardoor ik het wiskundig te mager veel te mager vond, enz.

4. Conclusies Elisja

- Nog steeds een mooi en inspirerend project;
- In de huidige programma's natuurkunde en wiskunde bewandelen de domeinen periodieke functies (wiskunde) en trillingen en golven (natuurkunde) haast disjuncte paden. Waardoor onze poging helaas een SE heeft opgeleverd dat i.i.g. geen recht doet aan de syllabus vwo wiskunde B;

- Wellicht zouden juist de ophanden zijnde vakvernieuwingen zich erop moeten richten om onze vakken weer dichterbij elkaar te brengen/te integreren, zoals ze in de geschiedenis ook vaak hand in hand zijn ontwikkeld.

Hugo Adema

Reflectie van Hugo Adema op het samenstellen van een gezamenlijk SE Natuurkunde en Wiskunde B voor havo

Examenprogramma

De situatie op mijn school zal vast niet representatief zijn voor alle scholen maar op mijn school bestaat er geen structureel overleg tussen wiskunde B en natuurkunde. Overigens ook niet met andere vakken zoals economie of biologie. Mijn kennis over het curriculum bij natuurkunde is gebaseerd op mijn eigen schoolcarrière van lang geleden en de enkele keer dat ik een natuurkundetoets of boek onder ogen krijg. Er vindt dus ook geen afstemming plaats tussen de wiskunde- en natuurkundesectie over het moment waarop deze hoofdstukken aan bod komen. Ik weet dus wel dat golfbewegingen nog steeds in het programma van natuurkunde zitten maar ik weet weinig over de manier waarop dit behandeld wordt, welke termen gebruikt worden en hoe wiskundig dit benaderd wordt.

Context

Bij het nadenken over een context voor de praktische opdracht die wij zouden maken was ik dus voor een groot deel afhankelijk van de input van de natuurkundecollega. Ik kwam zelf met het idee van het bepalen van de golflengte van de golven in een magnetron. Daar kleefden de nodige praktische bezwaren aan. Een context met een tandenborstel die een koord in beweging zet, leek haalbaarder. Naar later bleek, was dit een examenopgave uit het vwo-examen Natuurkunde 2018-I. Daar is op zich niets mis mee. Het was een goede inspiratiebron.

Praktijk vs. theorie

Bij het schrijven van de praktische opdracht bleek al snel dat het open karakter van een natuurkundig experiment lastig was te combineren met het exacte, modelmatige werken bij wiskunde. Daarom heb ik er voor gekozen om de praktische opdracht te verdelen in een theoretisch en een praktisch deel.

In het theoretische deel kunnen we er dan van uitgaan dat het koord exact door een sinusoïde is te beschrijven. Daarnaast biedt het de mogelijkheid om een aantal vragen te stellen die voor het praktische deel minder relevant zijn maar waarmee je wel het subdomein bij wiskunde B voldoende afdekt. Dit voelt enigszins gekunsteld maar zorgt er wel voor dat de verhouding wiskunde/natuurkunde in evenwicht blijft. Doordat het een natuurkundige context is, is het praktische deel al snel veel natuurkundiger. Hoewel het rekenen met evenredigheid en herleiden van formules in beide vakken aan bod komt.

Correctievoorschrift

Ook bij het formuleren van het correctievoorschrift merk ik het verschil in benadering tussen wiskunde B en natuurkunde. Omdat de examens voor wiskunde B ook gemaakt worden door leerlingen die geen natuurkunde in hun pakket hebben, wordt er niet gelet op het correcte gebruik van eenheden of het werken met significantie. Door deze samenwerking is het nu wel mogelijk om hier eisen aan te stellen.

Een ander groot verschil is dat er bij wiskunde altijd een voorbeelduitwerking beschreven wordt. Bij natuurkunde is men meer gewend aan het omschrijven van de denkstappen die genomen moeten worden zonder die expliciet uit te schrijven.

Bruikbaarheid

Volgens mij is het gelukt om een product te maken dat zeker gebruikt kan worden in havo 5. Of het lukt om dit in te bedden in een PTA, durf ik niet te zeggen. Misschien dat er scholen zijn die dit schoolexamen uitvoeren en het bij beide vakken mee laten tellen. De moeilijkheid zit hem er in dat niet iedereen met wiskunde B ook natuurkunde heeft en omgekeerd niet iedereen met natuurkunde ook wiskunde B heeft. Het is uiteraard ook mogelijk om deze praktische

opdracht te laten maken, puur als oefening richting een schriftelijk schoolexamen. Daarnaast is het voor natuur- en wiskundedocenten heel leerzaam om eens in de keuken van elkaars vak te kijken. Als we dat er mee weten te bereiken zou dat al heel mooi zijn.

Frits Rabbering

1. Gaat de aandacht voor kwalitatieve vragen te kosten voor de aandacht aan wiskunde bij natuurkunde?

In de constructieopdracht bij natuurkunde is een speerpunt om vraagstukken vaker kwalitatief te bevragen. Ik denk dat leerlingen dan de stof beter moeten doorgronden. Het beheersen van de concepten helpt bij het beantwoorden van de “leg uit” vragen.

Vroeger waren er volgens mij veel meer rekenvragen. De wiskundige vaardigheden waren meer verweven in de stof. Er waren meer kwantitatieve vragen. Vaak was het kiezen van de juiste formule, dan invullen en uitrekenen. Maar welke wiskundige vaardigheden waren hier nu echt voor nodig?

Tijdens de constructie van het SE vwo verbindende vaardigheden, zijn er vragen gemaakt waar de leerling gevraagd wordt gebruik te maken van bepaalde wiskundige vaardigheden. Op dit moment zie je dit soort vragen niet terug bij toetsen natuurkunde. Enkele voorbeelden:

- 1) Bij de opgave “Trampoline” wordt gevraagd om uit een partiële vergelijking ($m \cdot u'' = -C \cdot u$) de formule voor de periodetijd ($T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$) af te leiden. De wiskundige vaardigheden die hiervoor nodig zijn, zijn differentiëren en substitueren (staan gedefinieerd in domein A12 van de syllabus natuurkunde), niet heel erg moeilijk denk ik. Waarom zien we dit nu niet terug? Misschien omdat dit te ver uit de comfortzone is bij natuurkunde vwo.
- 2) Bij de opgave “Slinger” werd overwogen een vraag te maken waarin leerlingen kunnen aantonen dat bij kleine hoeken de slinger te benaderen is als een ideale veer. Daarbij moet met limieten worden gewerkt. In de syllabus van natuurkunde staat nergens dat de leerling dit moet kennen voor het CE. Vroeger wel? Bij de huidige natuurkunde is de formule voor de periodetijd van de slinger verdwenen. Bij natuurkunde wordt misschien nog wel gedoed dat bij een slinger dat de hoek klein moet blijven. Maar hoe klein en waarom wordt niet uitgelegd.
- 3) In de opgave “Oscilloscoop” wordt gevraagd om uit een stelsel van bewegingsvergelijkingen het gereduceerde faseverschil te bepalen. In de huidige syllabus voor natuurkunde staat expliciet dat de leerling niet t hoeft uit te rekenen als u gegeven is bij een sinusoïde-functie (zie domein B1). Ook opvallend is dat de enige sinusoïde-functies die te vinden zijn in de syllabus (zie domein A12 en B1) geen fase hebben. Kortom genoeg reden voor de constructiegroep natuurkunde om hier altijd te kiezen voor een grafische bepaling uit een figuur. Conceptueel komt fase bij natuurkunde bijna alleen even aan bod bij interferentie bij het tweespleten experiment, wat beschreven wordt bij domein F1 Quantum.

Als er bij natuurkunde meer dan formules invullen nodig is, zie bovenstaande voorbeelden, moet de leerling meteen kundig zijn in alle wiskundige vaardigheden die in 4, 5 en 6 vwo behandeld worden. In drie opgave kwamen differentiëren, limieten en stelsel van bewegingsvergelijkingen aan bod.

2. Verschillen in correctievoorschrift

Mij valt op dat er verschillen zijn bij de beantwoording van vragen. Als ik de opgave over de trampoline als voorbeeld neem. Ik zie dat ik verwacht dat een vwo-leerling bij natuurkunde de vraag anders zou beantwoorden dan een vwo-leerling bij wiskunde. Bijvoorbeeld omdat bij natuurkunde niet geëist is dat de leerling gegevens uit de sinusoïde moet kunnen verwerken, wordt de periodetijd en amplitude bepaald uit de grafiek in plaats van berekend uit het functievoorschrift. De vraag bestaat dan uit slechts twee stappen en vanuit een natuurkundig standpunt zou dit dus een 2 punts-vraag zijn in plaats van 4 punten. Ook is het gebruikelijk bij natuurkunde om een voorbeeldantwoord te geven.

Bij vraag 4 moet eerst de maximumsnelheid berekend worden en vervolgens aangetoond worden dat de trampolinespringer het hoogste punt haalt. Wederom zouden we in deze huidige tijd met de huidige syllabus leerlingen de maximumsnelheid laten bepalen, omdat we verwachten dat ze uit de figuur de amplitude bepalen.

3. “relevante vragen” (natuurkunde) versus “je kan het exact uitrekenen” (wiskunde)

Ik kreeg het gevoel dat natuurkundigen meer waarde hechten aan het vinden van een oplosstrategie van een probleem. Het uitwerken is subjectief. In het correctievoorschrift zie je deze verhouding terug. Bijna alle punten behalve de laatste gaat over de oplosstrategie, en de hele rest is slechts het completeerpunt. Bij wiskunde lijkt meer waarde gehecht te worden aan het stapsgewijs en systematisch opschrijven van elke rekentussenstap.

Vanuit natuurkundig oogpunt willen we alleen relevante vragen stellen: “blijkt uit behoud van energie dat inderdaad de trampoline genoeg energie mee geeft aan de trampolinespringer zodat deze de hoogte kan halen?” en is niet zozeer geïnteresseerd in wat is de snelheid op hoogte 1 m. Dit zou je natuurlijk kunnen uitrekenen, en daarmee kan je aantonen dat je heel wiskundig-vaardig bent, maar wat is de relevantie?

4. overige

Dus als ik nu terugkijk op dit proces, dan zou ik deze conclusies trekken:

- a) Natuurkunde is gefocust op strategieën om een vraagstuk op te lossen. Wiskunde op het toepassen van wiskundige vaardigheden. Losstaande werelden met verschillende leerdoelen. Beide heel belangrijk.
- b) Integratie van natuurkunde en wiskunde is lastig. Op de huidige manier hoe wiskunde stapsgewijs wordt aangeleerd zie ik alleen integratie in 6 vwo. Het kostte mij veel meer tijd om een opgave waar ik wiskunde wil integreren te construeren.
- c) Integratie van wiskunde in natuurkunde vind ik wel leuk en geeft meer mogelijkheden in het beter begrijpen van de onderliggende concepten bij natuurkunde.

Bijlage E: Schoolexamen havo opgaven en correctiemodel

Schoolexamen havo

Trillingen en golven in combinatie met periodieke functies

OPGAVEN

Colofon

Auteurs: Hugo Adema en Carolien de Graaf

April 2025



Dit materiaal is tot stand gekomen in samenwerking met Stichting Cito Arnhem. Deze opdracht is gebaseerd op een eindexamenopgave uit het examen Natuurkunde vwo 2018, eerst tijdvak.

Leraren zijn vrij om het materiaal te gebruiken en aan te passen mits verwezen wordt naar het oorspronkelijke materiaal.

Voor de docent

In dit schoolexamen komen het **wiskundig domein periodieke functies** en het **natuurkundig domein trillingen en golven** aan de orde. Deze opgavenset vormt een verzameling waaruit u als docent **door middel van knippen en plakken uw eigen toets kunt samenstellen**. De set bevat zowel standaardopgaven als niet-standaardopgaven. Daarnaast variëren de opgaven in moeilijkheidsgraad.

Dit schoolexamen bestaat uit 15 onderdelen met in totaal 46 punten. Het begint met een aantal theoretische vragen, daarna volgt een praktisch gedeelte.

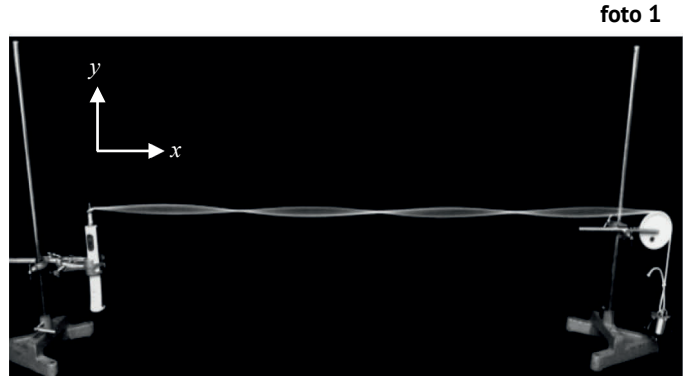
Door uw keuze uit de set van opgaven te maken kunt u uw toets aanpassen op uw eigen onderwijspraktijk, zodat de toets die u afneemt daarop aansluit. Door uw keuzes bepaalt u uiteraard de lengte en het niveau van de toets.

Iedere opgave is voorzien van een maximumscore en een beoordelingsmodel dat u kunt overnemen, maar het staat u vrij om een eigen maximumscore en/of beoordelingsmodel per opgave te hanteren. Ook kunt u ervoor kiezen bij de correctie al dan niet halve punten toe te kennen. Tot slot bepaalt u zelf de normering van de toets.

Trillende tandenborstel

De motor van een elektrische tandenborstel (zonder borstel) wordt in een statief geklemd. Aan het ijzeren staafje dat uit de motor steekt wordt een draad bevestigd. Deze draad hangt over een katrol en wordt strak gehouden door een aantal gewichtjes met massa m .

Als de tandenborstel wordt aangezet begint het ijzeren staafje te trillen. Er kan dan een staande golf ontstaan in het koord. Zie foto 1. In de foto zijn ook een x -richting en een y -richting aangegeven.



1. Voer de volgende opdrachten uit: (3 punten)
 - Leg uit met behulp van foto 1 of het ijzeren staafje in de x -richting of in de y -richting trilt.
 - Leg uit of de staande golf in foto 1 transversaal of longitudinaal is.

Een leerling experimenteert met verschillende gewichten en past de lengte L van het koord steeds zo aan dat een staande golf ontstaat. De resultaten staan in tabel 1. Hierbij is n het aantal buiken van de staande golf.

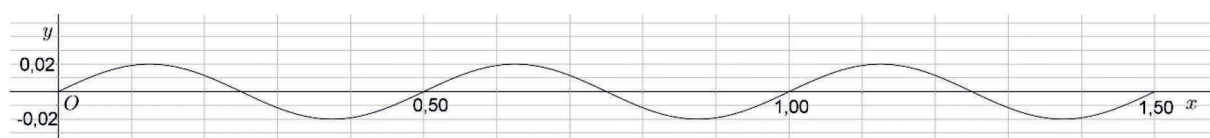
tabel 1

m (kg)	L (m)	n
0,100	1,26	9
0,200	1,50	6
0,300	1,44	5
0,400	1,62	5
0,500	1,43	4

2. Leg uit dat de golflengte bij de eerste meting gelijk is aan 0,28 meter. (2 punten)
3. Onderzoek of de golflengte recht evenredig is met de massa. (3 punten)

In figuur 1 staat het koord getekend bij de tweede meting op het moment dat het koord een maximale uitwijking heeft bereikt. Dit is geplaatst in een assenstelsel waarbij de punt van de tandenborstel in de oorsprong is geplaatst en de x -as overeenkomt met de draad in de ruststand.

figuur 1



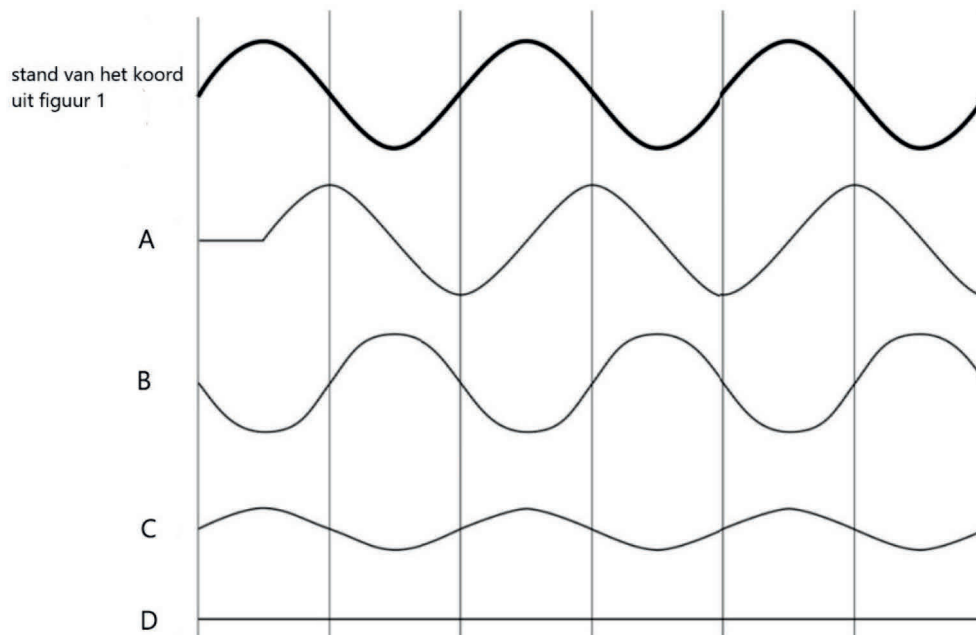
Het is mogelijk de stand van de draad wiskundig te beschrijven met een formule van de vorm $y = a \cdot \sin(bx)$. Hierbij is x de afstand tot de punt van de tandenborstel in meters.

4. Geef deze waarden van a en b . Rond beide waarden af op twee decimalen. (3 punten)

In figuur 1 heeft het koord op een horizontale afstand van 0,125 meter een uitwijking van 0,02 meter ten opzichte van de evenwichtsstand.

5. Bereken op algebraïsche wijze de kleinste horizontale afstand tot de punt van de tandenborstel waarbij het koord een uitwijking heeft van 0,01 meter. (3 punten)

figuur 2



6. Leg uit welk patroon in figuur 2 de stand van het koord toont een kwart trillingstijd later. (2 punten)

In plaats van te kijken naar de gehele draad, is het ook mogelijk te kijken naar een vast punt op de draad. Punt A is een vast punt op de draad op een afstand van 0,125 meter van de punt van de tandenborstel.

Met behulp van een hogesnelheidscamera wordt de trilling van punt A rond de x -as geregistreerd. De trilling blijkt te worden beschreven door de formule $y_A = 0,02 \sin(1760t)$. Hierbij is t de tijd in seconden.

7. Voer de volgende opdrachten uit (4 punten):
- Bereken de frequentie van de trilling van punt A.
 - Bereken hiermee de voortplantingsnelheid van de staande golf in figuur 1.

Punt B is een ander vast punt op de draad. Dit punt zit op een afstand van 0,0625 meter van het ijzeren staafje van de tandenborstel. Ook voor punt B kan een formule worden opgesteld waarmee de uitwijking y_B ten opzichte van de x -as kan worden beschreven.

8. Geef deze formule. (3 punten)

Praktisch gedeelte

Onderzoeksvraag: Met welke frequentie (in Hz) trilt het ijzeren staafje van de / van jouw elektrische tandenborstel?

9. Stel een beargumenteerde hypothese op bij deze onderzoeksvraag. (2 punten)

Theorie

Omdat we geen hogesnelheidscamera tot onze beschikking hebben, willen de frequentie bepalen met de opstelling uit foto 1. Dan is het nodig om de voortplantingssnelheid in het koord te weten. Theoretisch is bekend dat de voortplantingssnelheid afhangt van de massa die aan het koord wordt gehangen. Hoe strakker het koord gespannen is, hoe groter de voortplantingssnelheid. Er geldt:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{\rho_L}} \quad \text{formule (1)}$$

Hierin is

- v de voortplantingssnelheid (in m s^{-1})
- m de massa die aan het koord hangt (in kg)
- g de valversnelling (in kg m s^{-2})
- ρ_L de massa van 1 meter koord (in kg m^{-1})

Uitvoering

10. Maak een zelfde opstelling als op foto 1. Gebruik minimaal vijf verschillende gewichten. Verschuif de katrol telkens totdat je een staande golf krijgt met een aantal buiken. Noteer bij elk gewicht de afstand van de tandenborstel tot de katrol, het aantal buiken en de bijbehorende golflengte. (3 punten)

m (kg)	L (m)	n	λ (m)

11. Meet de massa en de totale lengte van het koord. (2 punten)

Uitwerking

12. Zet je meetgegevens uit in een diagram met m op de horizontale as en λ op de verticale as. Leg uit of er sprake is van een recht evenredig verband tussen m en λ . (4 punten)
13. Zet je meetgegevens uit in een diagram met $\sqrt{m}$ op de horizontale as en λ op de verticale as. Teken een rechte lijn door de oorsprong die zo goed mogelijk past bij je meetgegevens. De formule van deze rechte lijn is van de vorm $\lambda = a \cdot \sqrt{m}$. Bereken de waarde van a bij deze lijn. (5 punten)

14. Toon aan met behulp van formule (1) dat $f = \sqrt{\frac{g}{\rho_L a^2}}$. (4 punten)

Je hebt nu alle gegevens verzameld die nodig zijn om de onderzoeksvraag te beantwoorden.

15. Bereken met de behulp van de massa en de lengte van de draad de frequentie van de trilling van de tandenborstel. (3 punten)

Schoolexamen havo

Trillingen en golven in combinatie met periodieke functies

Correctiemodel

Colofon

Auteurs: Hugo Adema en Carolien de Graaf



April 2025

Dit materiaal is tot stand gekomen in samenwerking met Stichting Cito Arnhem.

Leraren zijn vrij om het materiaal te gebruiken en aan te passen mits verwezen wordt naar het oorspronkelijke materiaal.

Voor de docent

In dit schoolexamen komen het **wiskundig domein periodieke functies** en het **natuurkundig domein trillingen en golven** aan de orde. Deze opgavenset vormt een verzameling waaruit u als docent **door middel van knippen en plakken uw eigen toets kunt samenstellen**. De set bevat zowel standaardopgaven als niet-standaardopgaven. Daarnaast variëren de opgaven in moeilijkheidsgraad.

Door uw keuze uit de set van opgaven te maken kunt u uw toets aanpassen op uw eigen onderwijspraktijk, zodat de toets die u afneemt daarop aansluit. Door uw keuzes bepaalt u uiteraard de lengte en het niveau van de toets.

Iedere opgave is voorzien van een maximumscore en een beoordelingsmodel dat u kunt overnemen, maar het staat u vrij om een eigen maximumscore en/of beoordelingsmodel per opgave te hanteren. Ook kunt u ervoor kiezen bij de correctie al dan niet halve punten toe te kennen. Tot slot bepaalt u zelf de normering van de toets.

Trillende tandenborstel

1. maximumscore 3

- Een vast punt op de draad beweegt op en neer 1
- De trilling is dus in de y -richting 1
- Omdat de trilling loodrecht staat op de voortplantingsrichting is dit een transversale golf 1

2. maximumscore 2

- Als er 9 buiken zijn, zijn dit 4,5 volledige golven 1
- De golflengte is $\frac{1,26}{4,5} = 0,28$ meter 1

3. maximumscore 3

- Berekenen van de golflengte bij een andere massa bijvoorbeeld $\lambda = 0,715$ bij $m = 0,500$ 1
- Berekenen van de vermenigvuldigingsfactor bij de golflengte en de massa 1
- Voor de conclusie dat de golflengte niet evenredig is met de massa 1

4. maximumscore 3

- Bepalen van de periode (= golflengte) in figuur 1 geeft 0,50 meter 1
- $b = \frac{2\pi}{0,50} = 4\pi \approx 12,57$ 1
- De amplitude van de golf is 0,02 dus $a = 0,02$ 1

5. maximumscore 3

- Uit $\sin(x) = \frac{1}{2}$ volgt $x = \frac{1}{6}\pi$ 1
 - Dit is dus op $\frac{1}{12}$ deel van de hele golf 1
 - De horizontale afstand is $\frac{1}{12} \cdot 0,5 = 0,04 \dots$ meter 1
- of
- Uit $0,02\sin(12,57x) = 0,01$ volgt $\sin(12,57x) = 0,5$ 1
 - Dit geeft $12,57x = \frac{1}{6}\pi$ 1
 - De horizontale afstand is $\frac{1}{6}\pi: 12,57 = 0,04 \dots$ meter 1

6. maximumscore 2

- In een halve trillingstijd gaat een punt van zijn hoogste positie naar zijn laagste positie 1
- In een kwart trillingstijd is een punt dus halverwege zijn hoogste en laagste positie dus daarbij hoort patroon D 1

7. maximumscore 4

- Berekenen van de periode geeft $\frac{2\pi}{1760} = 3,5 \dots \cdot 10^{-3}$ seconde 1
- De frequentie is dan $\frac{1}{3,5 \dots \cdot 10^{-3}} = 280$ Hz 1
- Aflezen van de golflengte in figuur 1 1
- Uit $v = \lambda \cdot f$ volgt $v = 0,5 \cdot 280 = 140 \text{ ms}^{-1}$ 1

8. maximumscore 3

- Het inzicht dat de formule voor punt B van de vorm $y = a \cdot \sin(1760t)$ is waarbij a de amplitude is van punt B 1
- De amplitude van punt B is $y = 0,02 \sin(4\pi \cdot 0,0625) = 0,014$ 1
- De formule is dus $y = 0,014 \sin(1760t)$ 1

9. maximumscore 2

- Voor een goed beargumenteerde hypothese 2

10. maximumscore 3

- Voor een tabel met vijf verschillende gewichten en bijbehorende lengte, aantal buiken en golflengte 3

11. maximumscore 2

- Voor het meten van de massa 1
- Voor het meten van de lengte 1

12. maximumscore 4

- Voor het tekenen van een correct assenstelsel met de juiste grootheden en eenheden erbij 1
- Voor het tekenen van de meetgegevens in het diagram 1
- De punten in het diagram liggen niet op een rechte lijn door de oorsprong 1
- Er is dus geen recht evenredig verband tussen m en λ 1

13. maximumscore 5

- Voor het berekenen van de waarden van $\sqrt{m}$ 1
- Voor het tekenen van een correct assenstelsel met de juiste grootheden en eenheden erbij 1
- Voor het tekenen van de meetgegevens in het diagram 1
- Voor het tekenen van een rechte lijn door de oorsprong 1
- Voor het berekenen van de waarde van a met behulp van een punt op deze lijn 1

14. maximumscore 4

- Uit $v = \lambda \cdot f$ volgt $f = \frac{v}{\lambda}$ 1
- Substitutie van formule (1) en $\lambda = a \cdot \sqrt{m}$ geeft $f = \frac{\sqrt{mg}}{a\sqrt{m}}$ 1
- De factor $\sqrt{m}$ wegdelen geeft $f = \frac{\sqrt{g}}{a} \sqrt{\frac{\rho_L}{m}}$ 1
- Voor de rest van de herleiding 1

15. maximumscore 3

- Berekenen van ρ_L 1
- Gebruik van $f = \sqrt{\frac{g}{\rho_L a^2}}$ met a in de eenheid m kg^{-1/2} 1
- Completeren van de berekening van de frequentie 1

Bijlage F: Schoolexamen vwo opgaven, uitwerkbijlage en correctiemodel

Schoolexamen vwo

Trillingen en golven in combinatie met periodieke functies

OPGAVEN

Colofon

Auteurs: Elisja Giepmans en Frits Rabbering



April 2025

Dit materiaal is tot stand gekomen in samenwerking met Stichting Cito Arnhem.

Leraren zijn vrij om het materiaal te gebruiken en aan te passen mits verwezen wordt naar het oorspronkelijke materiaal.

Voor de docent

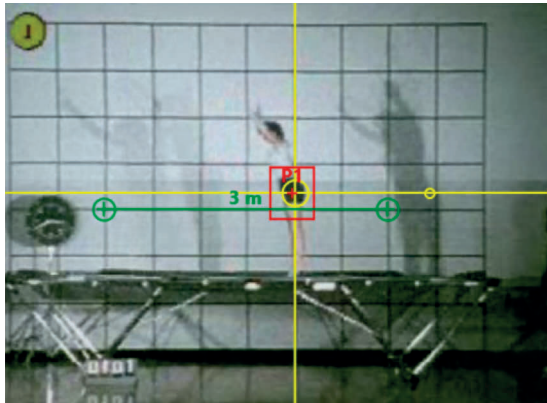
In dit schoolexamen komen het **wiskundig domein periodieke functies** en het **natuurkundig domein trillingen en golven** aan de orde. Deze opgavenset vormt een verzameling waaruit u als docent **door middel van knippen en plakken uw eigen toets kunt samenstellen**. De set bevat zowel standaardopgaven als niet-standaardopgaven. Daarnaast variëren de opgaven in moeilijkheidsgraad.

Door uw keuze uit de set van opgaven te maken kunt u uw toets aanpassen op uw eigen onderwijspraktijk, zodat de toets die u afneemt daarop aansluit. Door uw keuzes bepaalt u uiteraard de lengte en het niveau van de toets.

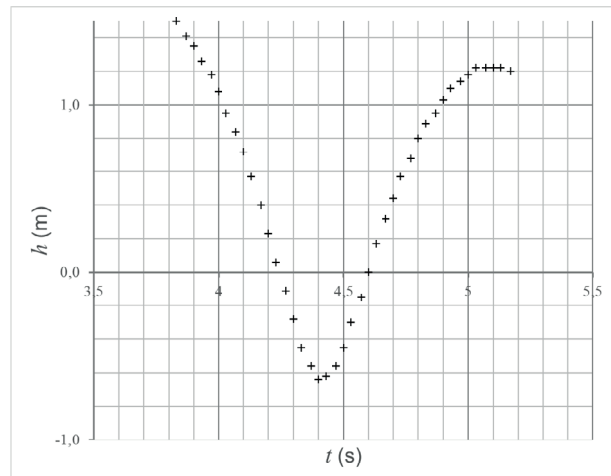
Iedere opgave is voorzien van een maximumscore en een beoordelingsmodel dat u kunt overnemen, maar het staat u vrij om een eigen maximumscore en/of beoordelingsmodel per opgave te hanteren. Ook kunt u ervoor kiezen bij de correctie al dan niet halve punten toe te kennen. Tot slot bepaalt u zelf de normering van de toets.

Trampoline

Met behulp van het programma coach wordt de beweging van een trampolinespringer geanalyseerd. Zie figuur 1.



figuur 1



figuur 2

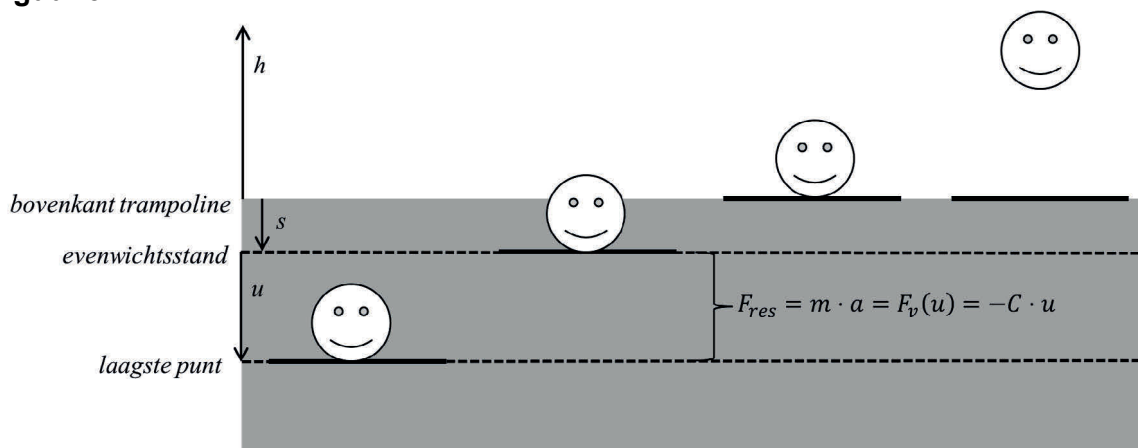
In figuur 2 staat in een (h, t) -diagram een gedeelte van de beweging.

Bij de analyse van de beweging worden de volgende afstanden gebruikt:

- h is de afstand van de trampolinespringer tot de trampoline en is positief als de trampolinespringer boven de trampoline is
- s is de afstand van de evenwichtsstand tot de bovenkant. Als de trampolinespringer stil staat op de trampoline geldt $h = -s$
- u is de afstand van de trampolinespringer tot de evenwichtsstand.

Zie figuur 3.

figuur 3



Vanaf de evenwichtsstand tot het laagste punt is de trampoline als een ideale veer op te vatten. Zie figuur 3. De resulterende kracht op de trampolinespringer is dan gelijk aan de veerkracht als gevolg van de uitrekking u .

In dit gedeelte van de beweging beweegt de trampolinespringer natuurkundig harmonisch.

1. Leg dit uit. (2 punten)

Wiskundig kan de formule in figuur 3 herschreven worden tot:

$$m \cdot u'' = -C \cdot u \quad (\text{vergelijking 1})$$

De sinusoid $u(t) = a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + c\right)$ is een oplossing voor vergelijking 1.

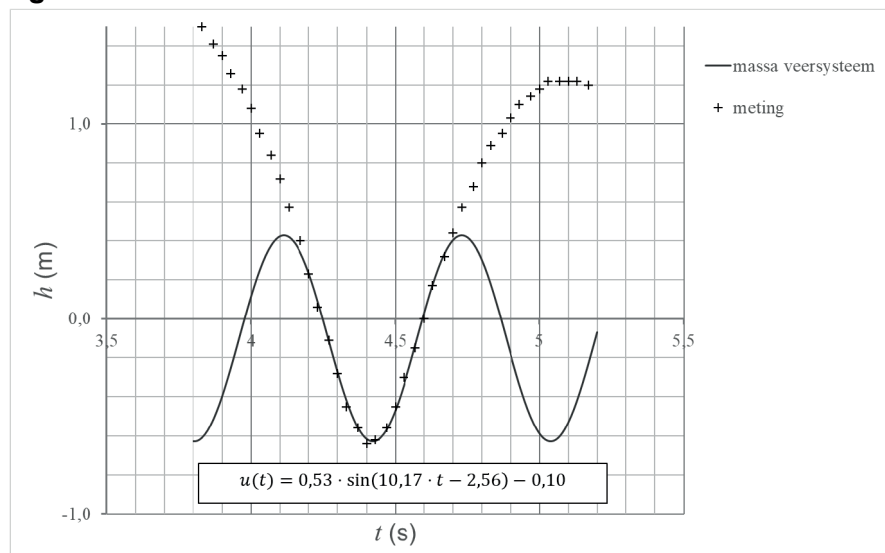
Dit kan je aantonen door deze functie en zijn dubbele afgeleide te substitueren in vergelijking 1. Vervolgens vereenvoudiging levert de formule voor de periodetijd:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} \quad (\text{vergelijking 2})$$

2. Bewijs dit. (5 punten)

In figuur 4 is de sinusoid gefit aan de meetpunten waar de trampolinespringer harmonisch beweegt.

figuur 4



De massa van de trampolinespringer is 50 kg.

3. Bereken de veerconstante en de periodetijd. Noteer je antwoorden in twee significante cijfers. Gebruik de gegevens uit het functievoorschrift van de sinusoid. (3 punten)

De trampolinespringer heeft op de evenwichtsstand genoeg snelheid om wrijvingloos op het hoogste punt te komen.

4. Voer de volgende opdrachten uit (7 punten):

- Bereken uit de sinusoid $u(t) = 0,53 \cdot \sin(10,17t - 2,56) - 0,10$ de maximale snelheid.
- Toon met behoud van energie aan dat de trampolinespringer het hoogste punt kan halen.

Slinger

Om heel nauwkeurig de tijd te kunnen bepalen, bevatten ouderwetse klokken een slinger. De lengte van de slinger bepaalt namelijk de trillingstijd. Voor kleine uitwijkingen geldt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Hierin is T de trillingstijd in seconde, l de lengte van de slinger¹ in meter, g de valversnelling in m/s^2 , met $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

Elke keer dat zo'n slinger de evenwichtstand passeert, geeft deze een tik.

5. Bereken algebraïsch de lengte van een slinger van een klok die precies elke seconde een tik geeft. Geef je antwoord in millimeters nauwkeurig. (4 punten)

Een klok heeft een slinger van 248 mm. De (slinger)hoek is 8° .

In figuur 1 zie je een schematische voorstelling van het slingeren van deze slinger.

Het uiteinde van de slinger beweegt over de boog AB van een cirkel met straal 248 mm. Afgerond op twee decimalen is de lengte van boog AB gelijk aan 34,63 mm.

6. Bereken de lengte van boog AB in mm in drie decimalen. (2 punten)

De lengte van lijnstuk AB is bij benadering gelijk aan de lengte van boog AB . Zie figuur 2.

figuur 2

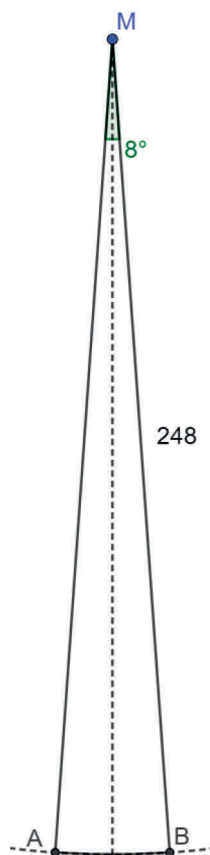


7. Bereken hoeveel procent de lengte van lijnstuk AB afwijkt van de lengte van boog AB . Geef je antwoord in twee decimalen. (3 punten)

Omdat de lengte van lijnstuk AB bij benadering gelijk aan de lengte van boog AB , kan de uitwijking van het uiteinde van de slinger ten opzichte van de verticaal bij benadering worden beschreven met een harmonische trilling. De formule van de uitwijking is van de vorm $u = a \sin(bt)$, met u in millimeters en t in seconden.

8. Stel de formule op voor u . Rond af op twee decimalen. (3 punten)

figuur 1



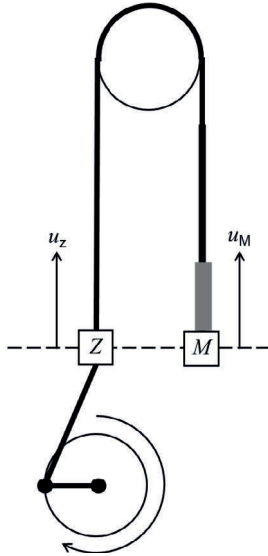
¹ De afstand tussen het opgangpunt en het zwaartepunt van de slinger is hier gedefinieerd als lengte.

Oscilloscoop

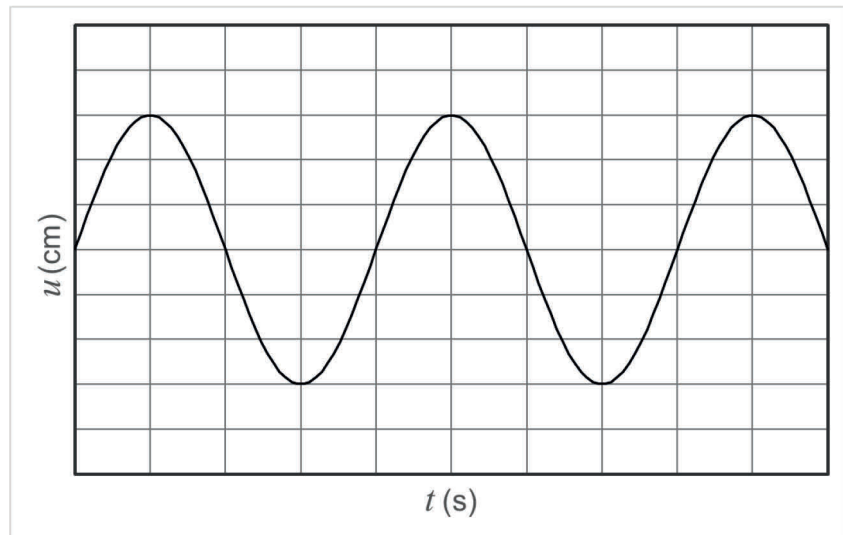
Met een oscilloscoop kunnen periodieke bewegingen geanalyseerd worden.

Een motor draait een zuiger (Z) aan. Zie figuur 1. De op en neer gaande beweging van de zuiger wordt onderzocht met een oscilloscoop. De beweging wordt elektronisch gemeten en op het “ y -kanaal” aangesloten. Op het “ x -kanaal” wordt de tijd ingesteld. In figuur 2 staat het oscillogram van de beweging.

figuur 1



figuur 2



De tijdsinstelling van de oscilloscoop is 2,5 s/div. De afstandsinstelling van de oscilloscoop is 0,4 cm/div. Op $T = 0$ beweegt de zuiger vanuit de evenwichtsstand naar boven.

9. Stel met behulp van figuur 2 het functievoorschrift op voor de beweging van de zuiger. Neem de uitwijking u in cm en de tijd t in seconden. Rond af op één decimaal. (3 punten)

Naast de zuiger hangt een massa (M) aan een elastiek (verbeeld als het grijze stuk in de figuur). Dit elastiek zit weer vast aan een kabel dat over een katrol vast zit aan de zuiger.

De massa aan het elastiek is te beschouwen als een massa-veersysteem. Het systeem is gedempt (de dempingsfactor is $\delta = 0,165$).

Afhankelijk van de frequentie f waarmee de zuiger op en neer beweegt, verandert het verschil in fase $\Delta\psi$ waarmee de massa trilt ten opzichte van de zuiger. Er geldt:

$$\Delta\psi = \psi_M - \psi_Z$$

Ook de versterking H van de trilling is afhankelijk van de frequentie. Er geldt:

$$H = \frac{A_M}{A_Z}$$

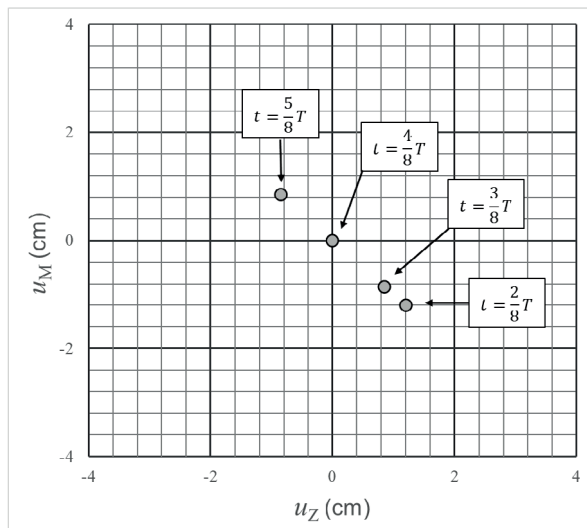
Bij $f = 0,1$ Hz is $\Delta\psi = 1 \cdot \pi$ rad en $H = 1$.

Op de uitwerkbijlage staat figuur 2 afgebeeld.

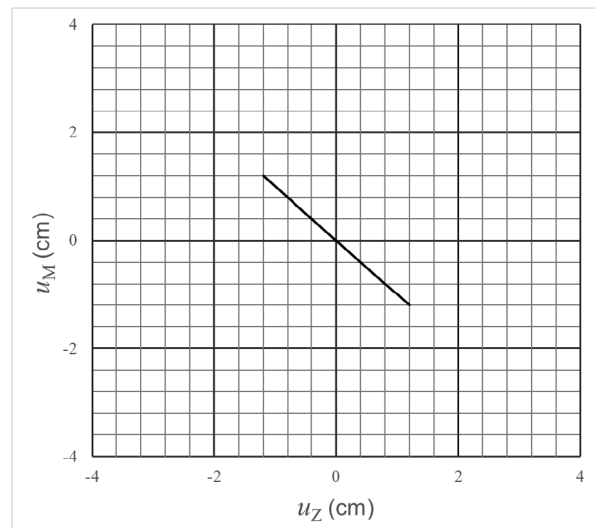
10. Teken in de figuur op de uitwerkbijlage de grafiek van de beweging van de massa.
(2 punten)

De instellingen op de oscilloscoop worden nu veranderd. Het signaal van de zuiger u_Z komt op het “x-kanaal” te staan en het signaal van de massa u_M komt op het “y-kanaal” te staan. Er ontstaat dan een zogeheten Lissajousfiguur. Terwijl de tijd doorloopt, wordt de grafiek punt voor punt opgeemaakt. Figuur 3 demonstreert hoe voor vier tijdstippen de grafiek opgebouwd wordt.

figuur 3



figuur 4



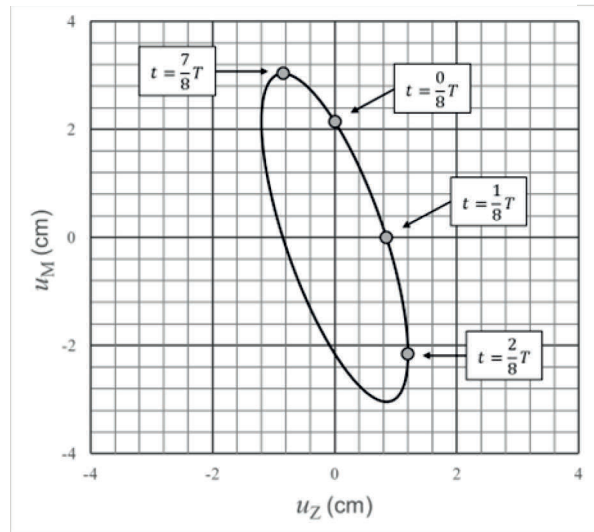
In de praktijk worden de grafiekpunten met hele kleine tijdstappen getekend. De oscilloscoop toont dan een lijngrafiek, zoals in figuur 4.

Figuur 4 geeft de Lissajousfiguur voor $f = 0,1$ Hz.

11. Licht toe waarom de Lissajousfiguur een lijn is **en** geef de formule van die lijn.
(2 punten)

Nu wordt de frequentie van de motor verhoogd naar $f = 8,5$ Hz. De Lissajousfiguur verandert in een ovaal. Zie figuur 5. Vier punten in de grafiek zijn aangeduid met een tijdstip.

figuur 5



12. Voer de volgende opdrachten uit: (3 punten)
- Bepaal het faseverschil.
 - Bepaal de versterking.

De bewegingsvergelijkingen voor de ovaal in figuur 3 zijn

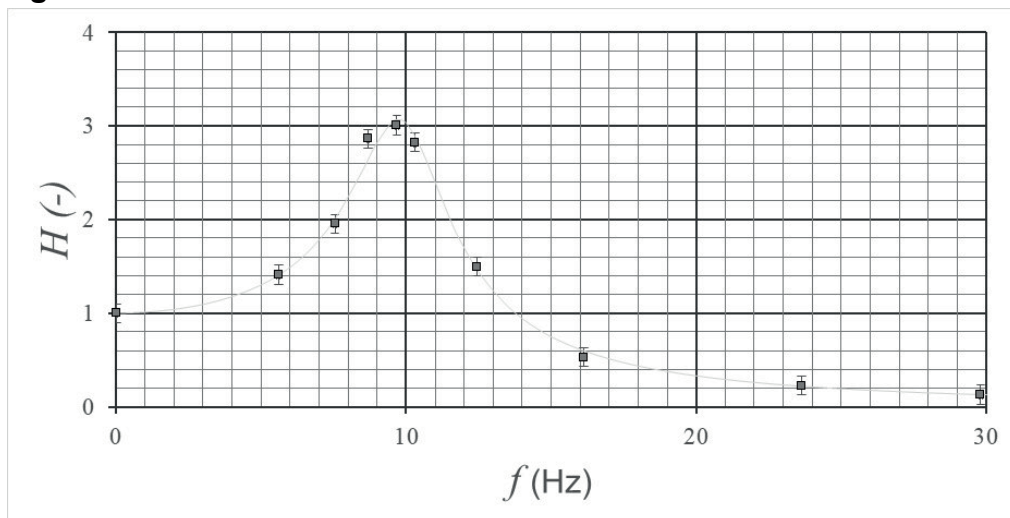
$$\begin{cases} u_z = 1,20 \sin\left(\frac{2\pi t}{8,5}\right) \\ u_m = 3,04 \sin\left(\frac{2\pi t}{8,5} + \frac{5}{4}\pi\right) \end{cases}$$

Wat opvalt, is dat de amplitude van de beweging van de massa nu groter is dan die van de zuiger. Ook is het (gereduceerde) faseverschil tussen de beweging van de zuiger en die van de massa veranderd: ze zijn niet meer tegelijkertijd in uiterste punten.

13. Bereken de versterking en het gereduceerde faseverschil in deze situatie. (4 punten)

Voor verschillende frequenties zijn de versterking en het faseverschil bepaald. De resultaten staan in figuur 6.

figuur 6



Uit figuur 6 blijkt dat de versterking bij een bepaalde instelling van de frequentie maximaal is.

14. Hoe wordt dit verschijnsel genoemd? (1 punt)

Schoolexamen vwo

Trillingen en golven in combinatie met periodieke functies

Uitwerkbijlage

Colofon

Auteurs: Elisja Giepmans en Frits Rabbering

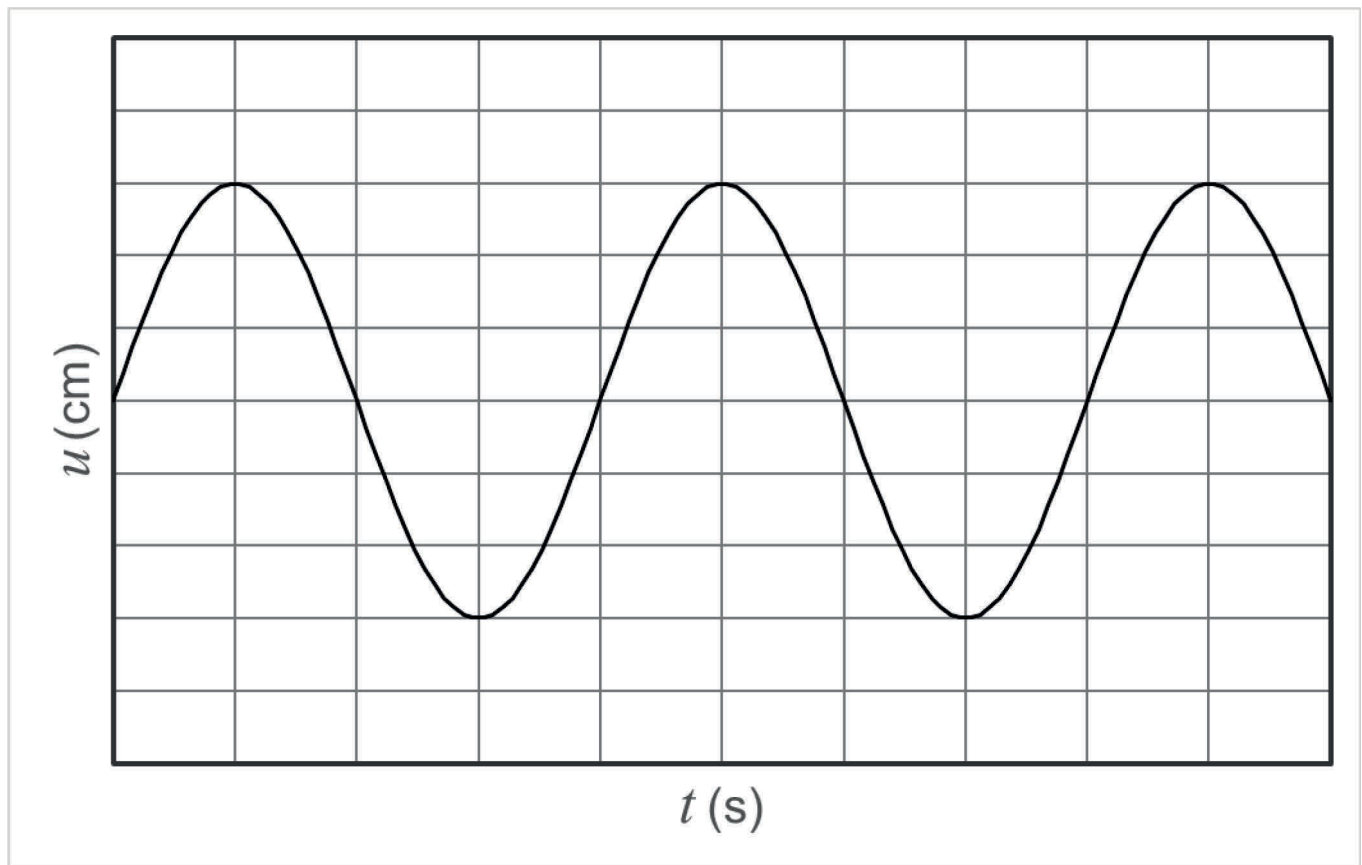


April 2025

Dit materiaal is tot stand gekomen in samenwerking met Stichting Cito Arnhem.

Leraren zijn vrij om het materiaal te gebruiken en aan te passen mits verwezen wordt naar het oorspronkelijke materiaal.

figuur 2 (horende bij vraag 10)



Schoolexamen vwo

Trillingen en golven in combinatie met periodieke functies

Correctiemodel

Colofon

Auteurs: Elisja Giepmans en Frits Rabbering

April 2025



Dit materiaal is tot stand gekomen in samenwerking met Stichting Cito Arnhem.

Leraren zijn vrij om het materiaal te gebruiken en aan te passen mits verwezen wordt naar het oorspronkelijke materiaal.

Voor de docent

In dit schoolexamen komen het **wiskundig domein periodieke functies** en het **natuurkundig domein trillingen en golven** aan de orde. Deze opgavenset vormt een verzameling waaruit u als docent **door middel van knippen en plakken uw eigen toets kunt samenstellen**. De set bevat zowel standaardopgaven als niet-standaardopgaven. Daarnaast variëren de opgaven in moeilijkheidsgraad.

Dit schoolexamen bestaat uit 14 onderdelen met in totaal 44 punten.

Door uw keuze uit de set van opgaven te maken kunt u uw toets aanpassen op uw eigen onderwijspraktijk, zodat de toets die u afneemt daarop aansluit. Door uw keuzes bepaalt u uiteraard de lengte en het niveau van de toets.

Iedere opgave is voorzien van een maximumscore en een beoordelingsmodel dat u kunt overnemen, maar het staat u vrij om een eigen maximumscore en/of beoordelingsmodel per opgave te hanteren. Ook kunt u ervoor kiezen bij de correctie al dan niet halve punten toe te kennen. Tot slot bepaalt u zelf de normering van de toets.

Trampoline

1. maximumscore 2

Voorbeeld van een antwoord:

In dit gedeelte van de beweging is de resulterende kracht op de trampolinespringer evenredig met en tegengesteld gericht aan de uitwijking.

- Inzicht dat de kracht tegenovergesteld is aan de uitwijking 1
- Inzicht dat de grootte van de kracht recht evenredig is met de uitwijking 1

2. maximumscore 5

- $u'(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + c\right)$ 1
- $u''(t) = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot a \cdot -\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + c\right) (= -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + c\right))$ 1
- Substitutie van $u(t)$ en $u''(t)$ in vergelijking 1 geeft 1

$$m \cdot -\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + c\right) = -C \cdot a \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + c\right)$$
- Hieruit volgt $m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2} = C$ en dit geeft $T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot m}{C}$ 1
- Hieruit volgt $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 \cdot m}{C}} = \sqrt{4\pi^2} \cdot \sqrt{\frac{m}{C}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$ 1

3. maximumscore 3

Voorbeeld van een antwoord:

De periodetijd is $\frac{2\pi}{10,17} = 0,617 \dots$, dus $T = 0,62s$. Invullen in vergelijking $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$, dus

$$0,62 = 2\pi \sqrt{\frac{50}{C}} \rightarrow C = \frac{4\pi^2 50}{0,62^2} = 5135 = 5,1 \cdot 10^3 \text{ N/m.}$$

- Het berekenen van de periodetijd met de formule van de sinusöide 1
- Gebruik van de formule $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{C}}$ 1
- Completeren 1

4. maximumscore 7

Voorbeeld van een antwoord:

Voor de snelheid v geldt $v = u'(t)$. De snelheid is dus maximaal als $u'(t)$ maximaal is. $u'(t) = 10,17 \cdot 0,53 \cos(10,17t - 2,56)$. Omdat $\cos(10,17t - 2,56)$ maximaal 1 is, is $u'(t)$ maximaal $10,17 \cdot 0,53 = 5,3901$ m/s.

Volgens de wet van behoud van energie geldt: $\Delta E_z = E_k$. Dit geeft $m \cdot g \cdot \Delta h = 0,5 \cdot m \cdot v^2$ en $m \cdot 9,81 \cdot \Delta h = 0,5 \cdot m \cdot 5,3901^2$. Hieruit volgt $\Delta h = \frac{\frac{1}{2} \cdot 5,3901^2}{9,81} = 1,480 \dots$

Op het moment dat de trampolinespringer loskomt van de trampoline geldt $u = -0,10$. De maximale hoogte is dus $1,480 \dots + -0,10 \approx 1,38$ meter en dat is hoger dan het hoogste punt van de grafiek.

- Het bepalen van de afgeleide $u'(t) = 10,17 \cdot 0,53 \cos(10,17t - 2,56)$ 1
- Het inzicht wanneer $u'(t)$ maximaal is 1
- Het inzicht dat volgens de wet van behoud van energie in het hoogste punt geldt $E_k \text{ moment van loskomen} = E_z \text{ hoogste punt}$ 1
- Het gebruik van $E_z = mgh$ en $E_k = 0,5mv^2$ 1
- Het oplossen van de vergelijking $m \cdot 9,81 \cdot h = 0,5 \cdot m \cdot 5,3901^2$ 1
- Het inzicht dat de hoogteverandering ten opzichte van de evenwichtsstand is berekend 1
- Het antwoord: de maximale hoogte is $1,480 \dots + -0,10 \approx 1,38$ meter en dat is hoger dan het hoogste punt van de grafiek 1

Slinger

5. maximumscore 4

- Het inzicht dat bij $T = 2$ er elke seconde een tik is 1
- Dus moet gelden $2\pi \sqrt{\frac{l}{9,81}} = 2$ 1
- Dit geeft $\sqrt{\frac{l}{9,81}} = \frac{1}{\pi}$, dus $\frac{l}{9,81} = \frac{1}{\pi^2}$ 1
- Het antwoord: $l = \frac{1}{\pi^2} \cdot 9,81 = 0,9939 \dots$ dus lengte van de slinger is (ongeveer) 994 mm 1

6. maximumscore 2

- Omtrek cirkel is $2\pi \cdot 248 = 1558,229 \dots$ (mm) 1
- De lengte van boog AB is dan $\frac{8}{360} \cdot 1558,229 \dots = 34,6273 \dots$ (mm) 1

7. maximumscore 3

- $\sin(4^\circ) = \frac{\frac{1}{2}AB}{248}$ 1
- Dit geeft $AB = 34,5999 \dots$ mm 1
- Het antwoord: $\frac{34,5999 \dots - 34,63}{34,63} \cdot 100\% = -0,08 \dots \%$ dus (ongeveer) 0,1% korter 1

8. maximumscore 3

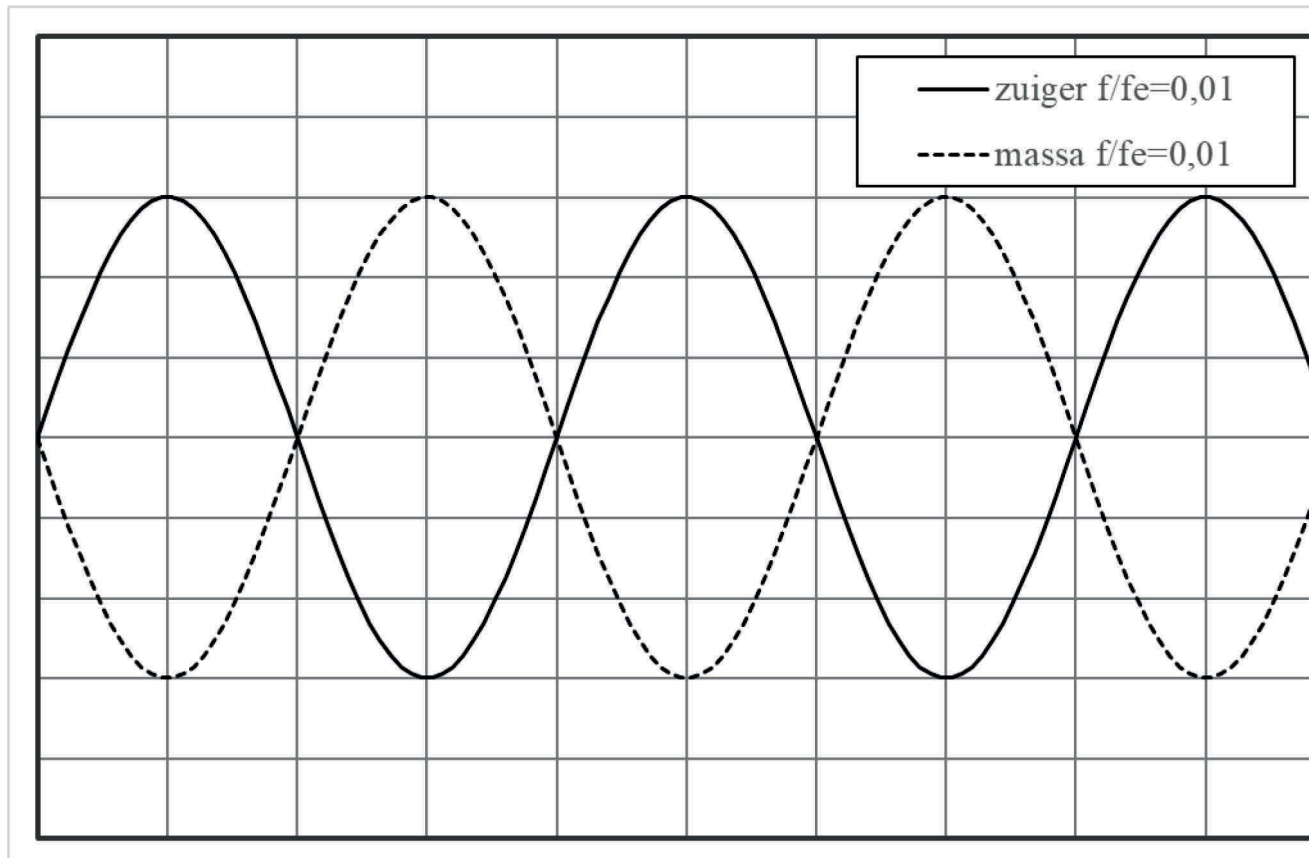
- $T = 2\pi \sqrt{\frac{0,248}{9,81}} = 0,9990 \dots$ 1
- Dit geeft $b = \frac{2\pi}{0,9990 \dots} = 6,289 \dots$ 1
- Het antwoord: $u = 17,32 \sin(6,29t)$ 1

Oscilloscoop

9. maximumscore 3

- Eén trilling in 10 s 1
- $\frac{2\pi}{10} = 0,6283 \dots$ 1
- Het antwoord: (de amplitude is 1,2 cm, dus) $u = \sin(0,628t)$ 1

10. maximumscore 2



- Inzicht $A_M = A_Z$ 1
- Inzicht $\psi_M = \psi_Z + \pi \text{ rad}$ 1

11. maximumscore 2

- Inzicht in het faseverschil van pi rad 1
- Formule van de lijn: $u_{\text{massa}} = -u_{\text{zuiger}}$ of $u_{\text{zuiger}} = -u_{\text{massa}}$ 1

12. maximumscore 3

Voorbeeld van een antwoord:

Op $t = \frac{5}{8}T$ is de $u_M = 0 \text{ cm}$ en beweegt omhoog, dus geldt dan: $\psi_M = 0 \text{ rad}$. Het faseverschil is dan dus $\Delta\psi = \psi_M - \psi_Z = -\frac{5}{8} \text{ rad}$.

Op $t = \frac{7}{8}T$ is de amplitude van de massa af te lezen: $A_M = 3,04$ cm. Op $t = \frac{2}{8}T$ is de amplitude van de zuiger af te lezen: $A_Z = 1,20$ cm. De versterking is dus: $H = \frac{3,04}{1,20} = 2,53$

- | | |
|---------------------------------|---|
| • Bepaling fase van de massa | 1 |
| • Aflezen amplitudes | 1 |
| • Completeren van de bepalingen | 1 |

13. maximumscore 4

- (Uit de bewegingsvergelijkingen volgt:) de amplitude van de beweging van de zuiger is 1,2 (cm) en van de massa is die 3,04 (cm) 1
- De versterking is dus $\frac{3,04}{1,2} = 2,53$ 1
- $u_{\text{massa}} = 3,04 \sin\left(\frac{2\pi t}{8,5} + \frac{5}{4}\pi\right) = 3,04 \sin\left(\frac{2\pi t}{8,5}\left(t + \frac{85}{16}\right)\right)$ 1
- Dit geeft een faseverschil van $\frac{-\frac{85}{16}}{8,5} = -\frac{5}{8}$, dus de gereduceerde fase is $\frac{3}{8}$ (of $\frac{5}{8}$) 1

14. maximumscore 1

- Resonantie 1

CITO **CTE** ontwikkelt en adviseert bij wettelijke toetsen

Cito

Amsterdamseweg 13
6814 CM Arnhem
Postbus 1034
6801 MG Arnhem
T (026) 352 11 11
www.cito.nl

Fotografie: Gijs Versteeg
© Stichting Cito Arnhem (2025)

