

# ALGEBRAÏSCHE VAARDIGHEDEN IN DE NIEUWE EXAMENS WISKUNDE HAVO EN VWO

Irene van Stiphout  
Paul Drijvers  
Ruud Stolwijk  
Jos Remijn

In de nieuwe examenprogramma's wiskunde van havo en vwo is het belang van algebraïsche vaardigheden groter. Wat zien we daarvan terug in de centrale examens? Scoren leerlingen van de pilotscholen op algebravragen beter dan de leerlingen van reguliere scholen? Irene van Stiphout en haar collega's bij Cito onderzochten dit. Ze vonden dat er inderdaad meer algebra in de examens zit en dat de leerlingen van pilotscholen hier iets hoger op scoren.

## Inleiding

Sinds 2011 (havo) en 2012 (vwo) worden pilotexamens afgenomen voor havo wiskunde A tot en met vwo wiskunde B. In de nieuwe examenprogramma's die hieraan ten grondslag liggen is meer aandacht gekomen voor algebraïsche vaardigheden. Om na te gaan in hoeverre de invulling van de vernieuwing in de pilotexamens een adequate toetsing vormt van deze nieuwe examenprogramma's, heeft Cito zowel de inhoud van de pilotexamens als de resultaten van leerlingen onderzocht. Het doel van het onderzoek was om antwoord te geven op de volgende twee vragen:

1. Welk type algebraïsche vaardigheden wordt getoetst in de centrale pilotexamens wiskunde A en B voor havo en vwo in de periode 2011-2016?
2. Hoe presteren leerlingen van pilotscholen op het gebied van algebraïsche vaardigheden in verhouding tot de leerlingen die hebben deelgenomen aan de reguliere examens?

## Aanpak

Voor de eerste onderzoeksvraag is in kaart gebracht wat voor soort algebraïsche vaardigheden in de syllabi staan van de nieuwe programma's voor havo wiskunde A en B, en vwo wiskunde A en B. Hieruit zijn vijf algebraïsche activiteiten gedestilleerd: formules of vergelijking opstellen; structuur van expressies herkennen; rol van een parameter bepalen; flexibiliteit tonen en herleidingen en vergelijkingen oplossen. Voor elk van deze vijf activiteiten hebben we drie niveaus van conceptueel begrip onderscheiden: niet of nauwelijks — enigszins — veel. Dit heeft geleid tot een tabel waarvan de rijen gevormd worden door die vijf activiteiten en de kolommen door de drie conceptuele niveaus. Van elke cel in de tabel is een beschrijving gemaakt waaraan een activiteit moet voldoen om in die cel geplaatst te worden.

We hebben ons beperkt tot de examens van wiskunde A en wiskunde B. Omdat de rol van algebra bij wiskunde C minder groot is en de leerlingaantallen klein zijn, is wiskunde C niet meegenomen in de analyses. Van elk examen is alleen het eerste tijdvak gecodeerd, omdat hieraan veel leerlingen meedoen en er dus veel gegevens beschikbaar zijn. In 2011 zijn er voor het eerst pilotexamens afgenomen in het havo; een jaar later, in 2012, voor het eerst in het vwo. In de analyse zijn alle pilotexamens in het eerste tijdvakken meegenomen tot en met 2016. Dat zijn totaal 44 (6 + 5 jaar, maal twee vakken, maal twee niveaus) examens.

De eenheid waarop is gescoord zijn de losse 'bolletjes' in de correctievoorschriften. De veronderstelling is dat een bolletje in het correctievoorschrift een denkstap voorstelt en dat die stappen min of meer vergelijkbaar zijn door de jaren heen. Meestal correspondeert een bolletje met één scorepunt.

In lijn met de beschrijvingen in de syllabi hebben we een vrij strenge definitie gehanteerd van algebra. Dat betekent dat bijvoorbeeld het bepalen van een groeifactor per jaar in een context waarbij twee meetwaarden met een tussenperiode van 10 jaar *niet* als algebra is gecodeerd, omdat er niet met variabelen wordt gewerkt. Alle examens zijn door minstens twee deskundigen gecodeerd en vervolgens zijn beide coderingen samengevoegd voor de analyses.

Voor de tweede onderzoeksvraag is gekeken naar de prestaties van leerlingen op vragen die zowel in de reguliere als in de pilotexamens zaten. Van deze overlapvragen is het type vaardigheid en het conceptuele niveau bepaald. Vervolgens zijn van deze vragen de p-waarden verzameld uit de databestanden waarover Cito beschikt na afloop van de examens. Deze p-waarden zijn getransformeerd tot zogeheten logits om ze geschikt te maken voor vergelijking van groepen.

| mate van benodigde conceptuele vaardigheden |                 |           |      |        |
|---------------------------------------------|-----------------|-----------|------|--------|
| niveau en soort wiskunde                    | niet/nauwelijks | enigszins | veel | totaal |
| havo wiskunde A                             | 5%              | 13%       | 2%   | 20%    |
| havo wiskunde A pilot                       | 10%             | 17%       | 4%   | 30%    |
| havo wiskunde B                             | 19%             | 12%       | 4%   | 35%    |
| havo wiskunde B pilot                       | 20%             | 19%       | 9%   | 47%    |
| vwo wiskunde A                              | 13%             | 12%       | 0%   | 26%    |
| vwo wiskunde A pilot                        | 16%             | 22%       | 6%   | 44%    |
| vwo wiskunde B                              | 19%             | 25%       | 2%   | 46%    |
| vwo wiskunde B pilot                        | 21%             | 30%       | 17%  | 67%    |

tabel 1 Relatief aantal punten in algebraïsche vaardigheden per vak en conceptueel niveau

## Resultaten

Om na te gaan hoeveel algebra in de examens voorkomt, is voor elk examen bepaald hoeveel punten te behalen zijn in elk van de algebra categorieën. De resultaten staan in tabel 1, uitgesplitst naar vak en naar conceptueel niveau. Opvallend is ten eerste dat de pilotexamens relatief flink meer punten algebra bevatten dan de reguliere examens. Dit is in lijn met het doel van de vernieuwing om meer aandacht te besteden aan algebra (cTWO, 2007). Ten tweede zien we bij havo en vwo en bij wiskunde A en B een verschuiving naar meer conceptuele algebra. Deze toename in de hoeveelheid algebra en de verschuiving naar meer conceptuele algebra is bij havo wiskunde A vooral terug te vinden in de kolommen ‘niet of nauwelijks’ en ‘enigszins’. Voor de overige drie vakken (havo wiskunde B, vwo wiskunde A, vwo wiskunde B) is deze trend vooral te zien in de kolommen ‘enigszins’ en ‘veel’.

In tabel 2 is de algebra in de examens uitgesplitst naar de vijf soorten algebraïsche activiteiten. Voor havo en vwo en voor wiskunde A en B zijn er relatief veel punten te behalen met formule of vergelijking opstellen en met herleidingen en vergelijkingen oplossen. Een kleiner deel van de

activiteiten zit in ‘structuur expressies herkennen’. Relatief weinig punten hebben de activiteiten ‘flexibiliteit tonen’ en ‘rol parameter bepalen’, al is dat bij de pilotexamens iets hoger dan bij de reguliere examens. Dit betekent dat de pilotexamens iets meer verschillende algebraïsche vaardigheden bevatten dan de reguliere examens en dat het scala aan algebraïsche activiteiten dat in de syllabus wordt genoemd niet volledig is terug te vinden in de examens.

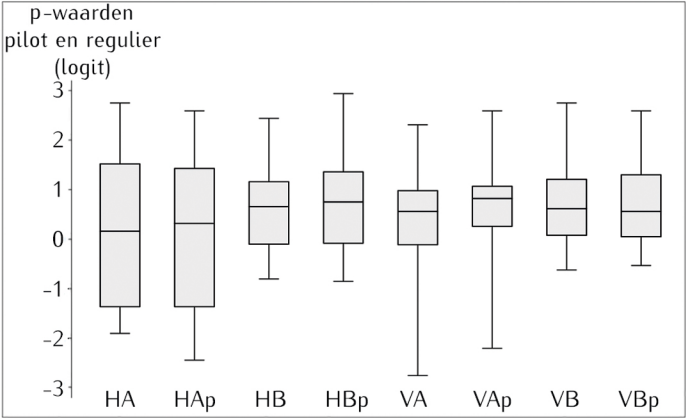
Om na te gaan of de prestaties van leerlingen vooruit zijn gegaan, hebben we de prestaties van leerlingen vergeleken op vragen over algebra uit de overlap van reguliere en pilotexamens. Dit aantal wisselt per examen tussen twee en zeven vragen. In tabel 3 staan de verschillen in p-waarden tussen reguliere en pilotleerlingen per vak. Het gemiddelde verschil in p-waarden over de 112 vragen is ongeveer 2 procentpunten ( $M = 1,93$ ;  $SD = 6,5$ ). De  $p$ -waarden van de pilotleerlingen blijken significant hoger zijn dan die van de reguliere leerlingen ( $t(111) = 3,2$ ;  $p = 0,002$ ). De conclusie is dan ook dat de pilotleerlingen op de algebra overlap-vragen significant beter scoren dan de reguliere leerlingen.

|                                      | HA  | HAp | HB  | HBp | VA  | VAp | VB  | VBp |
|--------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| formule of vergelijking opstellen    | 9%  | 10% | 13% | 15% | 10% | 20% | 13% | 19% |
| structuur expressies herkennen       | 2%  | 5%  | 1%  | 2%  | 5%  | 8%  | 2%  | 2%  |
| rol parameter bepalen                | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  | 0%  |
| flexibiliteit tonen                  | 0%  | 2%  | 0%  | 1%  | 0%  | 1%  | 0%  | 0%  |
| herleiden en vergelijkingen oplossen | 8%  | 13% | 21% | 29% | 11% | 15% | 31% | 45% |
| totaal                               | 20% | 30% | 35% | 47% | 26% | 44% | 46% | 67% |

tabel 2 Relatief aantal punten in algebraïsche vaardigheden per vak uitgesplitst naar activiteiten

| vak             | gemiddeld verschil p-waarde (SD) |
|-----------------|----------------------------------|
| havo wiskunde A | 0,26 (5,1)                       |
| havo wiskunde B | 3,45 (5,0)                       |
| vwo wiskunde A  | 4,45 (7,6)                       |
| vwo wiskunde B  | -0,08 (7,9)                      |

tabel 3 Verschil in p-waarden op overlapvragen algebra per vak



figuur 1 Boxplot van de verschillen in logits van p-waarden uitgesplitst naar vak

Figuur 1 geeft deze verschillen in prestaties weer, uitgesplitst naar de vier wiskundevakken. Met name bij havo wiskunde B en bij vwo wiskunde A wordt door pilotleerlingen hoger gescoord. De conclusie is dus dat de verschillen in p-waarden met name aan de orde zijn voor havo wiskunde B en vwo wiskunde A. Wat opvalt, is dat de prestaties in algebra bij vwo wiskunde B niet vooruit zijn gegaan, waar dat wellicht wel in de lijn der verwachting lag. Dit beeld wordt vooral veroorzaakt door de lagere algebra-prestaties van pilotleerlingen bij vwo wiskunde B in 2014. Duidelijke trends wat betreft afnamejaar, type algebraïsche vaardigheid, of conceptueel niveau zijn niet gevonden.

### Conclusie

Samengevat kunnen we stellen dat de pilotexamens meer algebra bevatten dan de reguliere examens en dat de pilotexamens meer conceptuele algebra bevatten dan de reguliere examens. Dit is in lijn met de doelstellingen van de vakvernieuwing. Daarnaast valt op dat de algebraïsche activiteiten die in de syllabi zijn beschreven niet in de volle breedte terugkomen in de examens. We denken dat dit vooral komt doordat sommige activiteiten meer impliciet aan de orde komen. Bij het oplossen van een vergelijking bijvoorbeeld zal de leerling het type vergelijking moeten herkennen voordat hij een geschikte oplossingsmethode kan kiezen. Deze stap wordt echter niet beloond met een punt in het correctievoorschrift en is dus niet gescoord in onze analyse. Toch denken we dat de diversi-

teit aan algebraïsche activiteiten een aandachtspunt kan zijn in de toekomstige constructie. Verder laat de analyse zien dat de pilotexamens meer conceptuele algebraïsche vaardigheden bevatten dan de reguliere examens. Dit verschil is bij beide vakken en beide niveaus te zien maar bij wiskunde B groter dan bij wiskunde A. Ook dit is in lijn met de doelstellingen van de vernieuwing. Wat betreft de prestaties van leerlingen op algebra concluderen we dat de pilotleerlingen beter op algebra presteren dan de leerlingen van de reguliere programma's. Verschillen in afnamejaar, type vaardigheid en conceptueel niveau zijn niet gevonden. Uiteraard moeten deze conclusies alleen al gezien het beperkte aantal leerlingen in de pilot met de nodige voorzichtigheid bekeken worden. Tot slot bevelen we aan om de komende jaren centrale eindexamens te blijven monitoren op wiskundige denkactiviteiten en op algebraïsche vaardigheden.

### Literatuur

- cTWO (2007). Rijk aan betekenis, visie op vernieuwd wiskundeonderwijs. Utrecht: cTWO.
- Cito (2017). Monitoring algebraïsche vaardigheden in de nieuwe examens wiskunde havo en vwo. Intern rapport. Arnhem: Cito.

De syllabi die in dit onderzoek zijn gebruikt, zijn te vinden op [www.examenblad.nl](http://www.examenblad.nl).

### Over de auteurs

Irene van Stiphout is werkzaam als lerarenopleider bij de Hogeschool Arnhem Nijmegen en als toetsdeskundige bij Cito. E-mailadres: [irene.vanstiphout@cito.nl](mailto:irene.vanstiphout@cito.nl)  
Paul Drijvers is onderzoeker bij Cito en hoogleraar in de didactiek van de wiskunde bij de Universiteit Utrecht. E-mailadres: [paul.drijvers@cito.nl](mailto:paul.drijvers@cito.nl)  
Ruud Stolwijk is toetsdeskundige bij Cito. E-mailadres: [ruud.stolwijk@cito.nl](mailto:ruud.stolwijk@cito.nl)  
Jos Remijn is toetsdeskundige bij Cito. E-mailadres: [jos.remijn@cito.nl](mailto:jos.remijn@cito.nl)